



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría

$$3x - y + 2z = 4$$

$$P = (-1, 0, 1)$$

Junio 2025 · Problema 3.2

Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

Se hace un esquema de la situación.

El vector normal de π , será director del plano pedido.

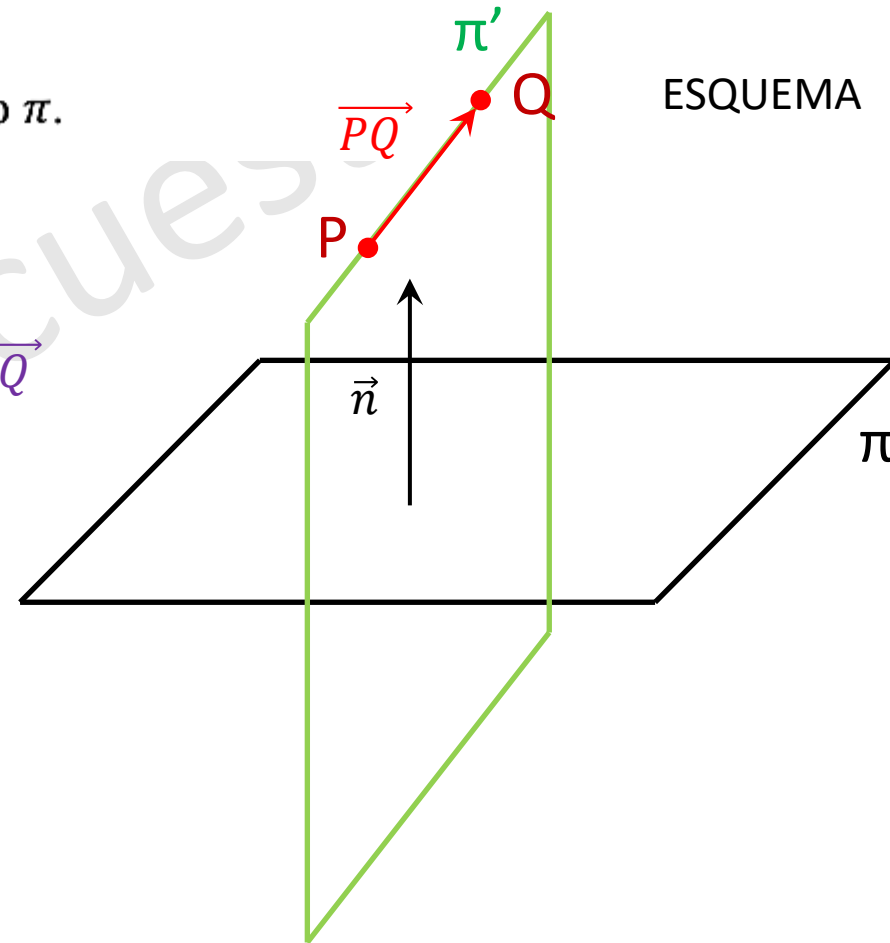
El plano pedido, π' , tendrá por vectores directores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{PQ}$ y pasará por P o Q .

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (3, -1, 2)$

El vector $\overrightarrow{PQ}$ es:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,1,2) - (-1,0,1) = (3,1,1)$$

Ya tenemos todos los datos necesarios para calcular la ecuación de π' , lo hago en la siguiente diapositiva.



Ejercicio 3.2

3.2.1 La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q=(2,1,2)$.

Los datos son: $\vec{n} = (3, -1, 2)$ $\overrightarrow{PQ} = (3, 1, 1)$ $P = (-1, 0, 1)$

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:

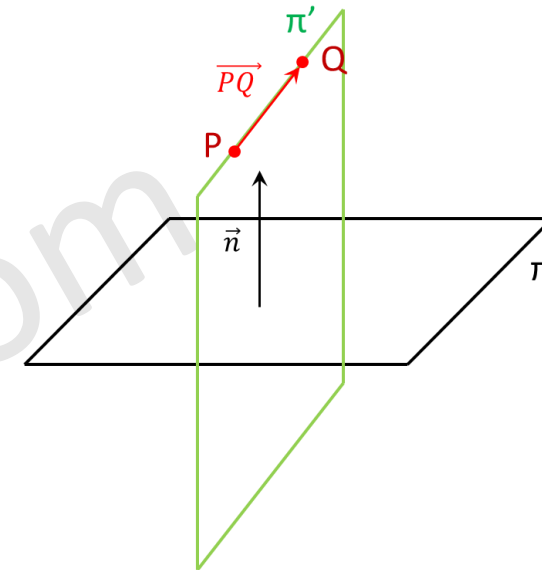
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ PQ_x & PQ_y & PQ_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x + 1 & y - 0 & z - 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 3y + 6z - 9 = 0$$

Puedo dividir a ambos lados de la igualdad por (-3) para simplificar la expresión de la ecuación del plano pedida.

$$\pi': x - y - 2z + 3 = 0$$

La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y Q es $\pi': x - y - 2z + 3 = 0$



Ejercicio 3.2

3.2.2 La distancia del punto Q al plano π . $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$ $Q = (2,1,2)$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{Q\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5 \cdot \sqrt{14}}{14}$$

La distancia del punto Q a π es: $\frac{5 \cdot \sqrt{14}}{14}$ **unidades**

Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.3 El punto simétrico de P respecto al plano π .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por P .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto P . $\vec{v}_r = \vec{n} = (3, -1, 2)$ $P = (-1, 0, 1)$

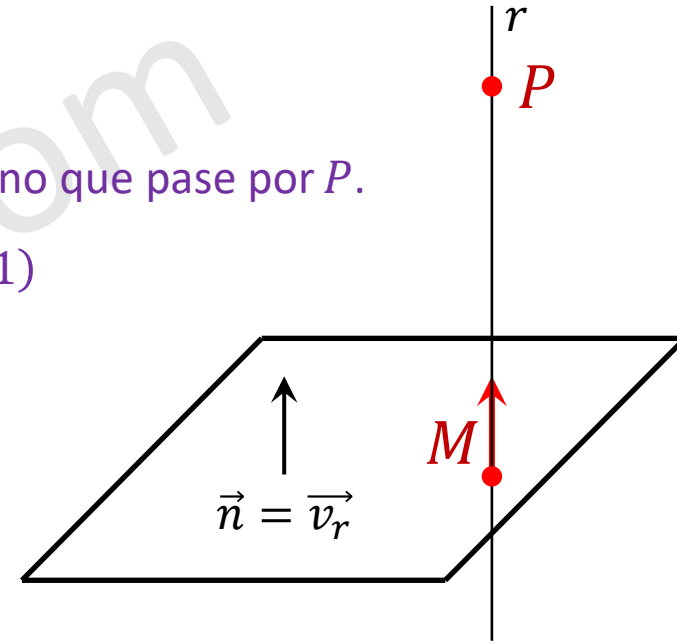
2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán. $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano. M

Se sustituye r en π :

$$3x - y + 2z = 4 \rightarrow 3 \cdot (-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2 \cdot (1 + 2\lambda) = 4 \rightarrow 14\lambda - 5 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{5}{14}$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = \frac{5}{14}$ en r . $M: \begin{cases} x = -1 + 3 \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{5}{14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \end{cases}$



Ejercicio 3.2

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.3 El punto simétrico de P respecto al plano π .

4) Se calcula el punto simétrico de P respecto de M .

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las coordenadas de los vectores coinciden con las componentes de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{1}{14}, -\frac{5}{14}, \frac{12}{7} \right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right)$$

El punto simétrico de P respecto al plano π es: $\left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right)$

