

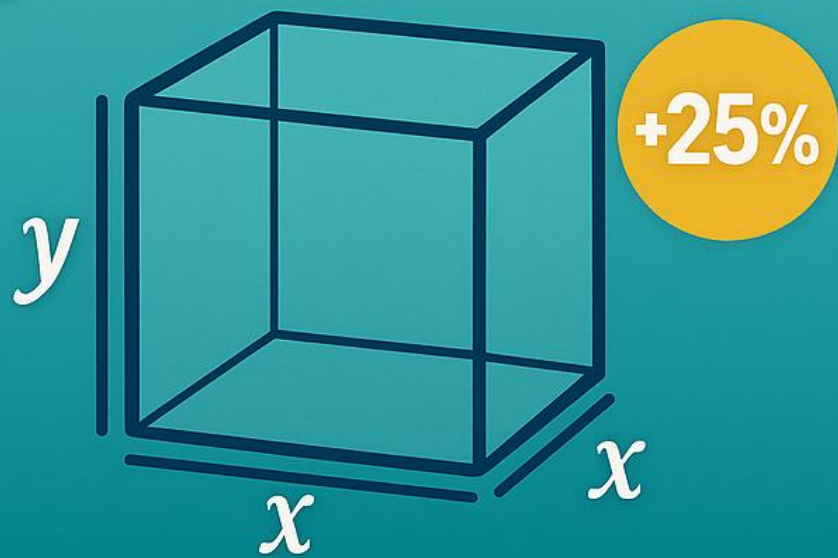


PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización



Junio 2025 · Problema 4.1



Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



Ejercicio 4.1

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

- 4.1.1 (0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .
- 4.1.2 (1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.
- 4.1.3 (0.5 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

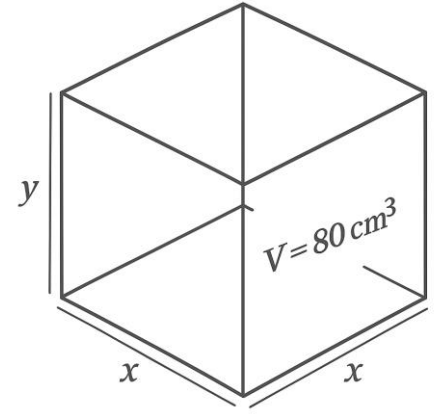
Ejercicio 4.1

4.1.1 La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

Se representa un esquema de la caja.

Se definen las variables del problema x : longitud de los lados de la base de la caja en cm;

y : longitud de la altura de la caja en cm.



Se obtienen las expresiones relacionadas con el coste del material necesario para construir la caja.

“El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 .” $1 \cdot 4 \cdot x \cdot y$:coste de las 4 caras laterales

“La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.” $1,25 \cdot 1 \cdot 2 \cdot x^2$:coste de la base y de la tapa.

El coste total en función de las variables x e y es:

$P(x, y) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y$: coste del material en céntimos de euro. x e y se miden en cm.

Para obtener la expresión en función de x , debemos utilizar el dato que relaciona las variables x e y .

“una caja de 80 cm^3 de volumen.” $V = x^2 \cdot y = 80 \rightarrow y = \frac{80}{x^2}$

Se sustituye en la función en la siguiente diapositiva. ©Angel Cuesta Arza

Ejercicio 4.1

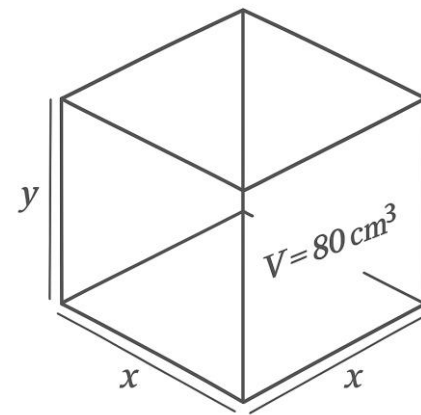
4.1.1 La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

$$P(x, y) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y; \quad y = \frac{80}{x^2}$$

Se expresa el coste del material de la caja en función de x .

$$P(x) = 2,5 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{80}{x^2} = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$$

El dominio de $P(x)$ es $x > 0$ (x en céntimos de euro).



La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x es. $P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$

Ejercicio 4.1

4.1.2 Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible

Calculo la derivada de la función $P(x)$.

$$P'(x) = 5 \cdot x - \frac{320}{x^2} \quad \text{Se iguala a cero para obtener el óptimo local.}$$

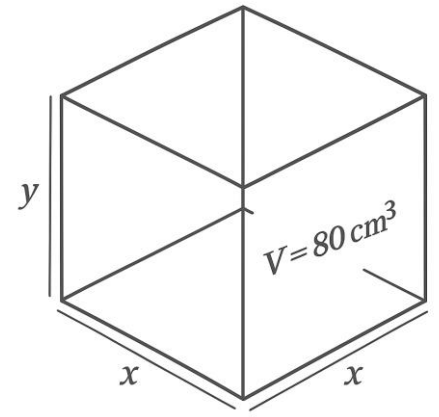
$$5 \cdot x - \frac{320}{x^2} = 0 \longrightarrow 5 \cdot x = \frac{320}{x^2} \longrightarrow x^3 = \frac{320}{5} = 64 \longrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Comprobamos que en $x = 4$, $P(x)$ tiene un mínimo relativo utilizando el **criterio de la segunda derivada**. También puedes hacer un estudio de signos.

$$P''(x) = 5 - \frac{0 \cdot x^2 - 320 \cdot 2x}{(x^2)^2} = 5 - \frac{-640}{x^3} = 5 + \frac{640}{x^3}$$

$$P''(4) = 5 + \frac{640}{4^3} > 0 \quad \text{Por lo tanto, } x = 4, P(x) \text{ tiene un mínimo relativo.}$$

$$\text{Calculo el valor de } y: y = \frac{80}{x^2} = \frac{80}{4^2} = \frac{80}{16} = 5$$



$$P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$$

Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible son:

Lado de la base de la caja, $x_{\min} = 4 \text{ cm}$ y altura de la caja $y_{\min} = 5 \text{ cm}$.

Ejercicio 4.1

4.1.3 El precio del material en el caso anterior.

Recordamos que: $P(x) = 2,5 \cdot x^2 + \frac{320}{x}$

Se calcula $P(4)$.

$$P_{min} = P(4) = 2,5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 40 + 80 = 120 \text{ céntimos de euro} = 1,2 \text{ €}$$

El precio del material para construir la caja es **1,2 €**.