



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Área bajo la curva

$$f(x) = x|x-2|$$

Junio 2025 · Problema 4.2

Ejercicio 4.2

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

www.angelcuesta.com

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = x \cdot |x - 2|$$

Se expresa la función dada como función a trozos. Se recuerda la definición de la función valor absoluto de x .

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De forma análoga se define la función $g(x) = |x - 2|$

$$|x - 2| = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x - 2 < 0 \\ x - 2, & \text{si } x - 2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |x - 2| = \begin{cases} -x + 2, & \text{si } x < 2 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ya podemos definir $f(x) = x \cdot |x - 2|$

$$f(x) = x \cdot |x - 2| = \begin{cases} x \cdot (-x + 2), & \text{si } x < 2 \\ x \cdot (x - 2), & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x \cdot |x - 2| = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La función $f(x)$ tiene por dominio todos los números reales. Por otro lado, tiene dos trozos definidos por funciones cuadráticas. Para representar de forma precisa la gráfica de la función en el intervalo propuesto, no sólo debemos dar valores a la función. Es obligatorio calcular los extremos relativos de la misma.

Calculo su derivada e igualo a cero cada trozo. $f'(x) = \begin{cases} -2x + 2, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x + 2 = 0, & \text{si } x < 2 \\ 2x - 2 = 0 & \text{si } x > 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1, & \text{si } x < 2 \\ x = 1, & \text{si } x > 2 \end{cases} \longrightarrow \text{Solución no válida}$$

Mediante el criterio de la segunda derivada compruebo si en $x = -1$ hay un máximo o un mínimo relativo (ya sé que es un máximo porque es una función cuadrática con signo negativo en el coeficiente cuadrático).

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 2 \\ \text{No se hace} \end{cases}$$

Puesto que $f''(1) = -2 < 0$; en $x = 1$ $f(x)$ tiene **un máximo relativo**

Ejercicio 4.2

4.2.1 Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

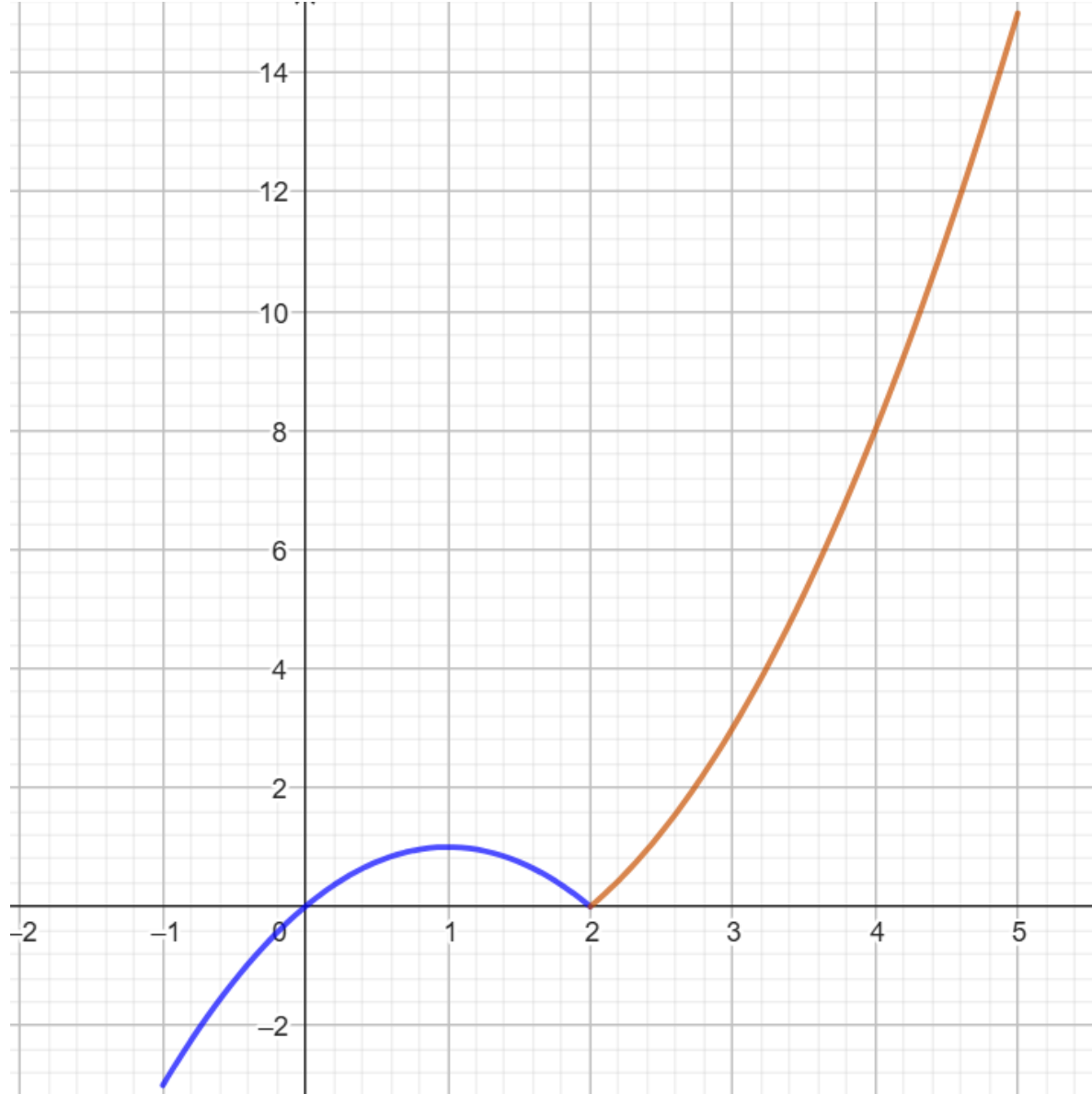
Conocida el valor de la abscisa del único extremo relativo, procedemos a dar valores a la función para representarla gráficamente.

x	$f(x) = -x^2 + 2x$
-1	-3
0	0
1	1
2	0

x	$f(x) = x^2 - 2x$
2	0
3	3
4	8
5	15

Se muestra la representación gráfica en la siguiente diapositiva para que se pueda ver bien.

Ejercicio 4.2



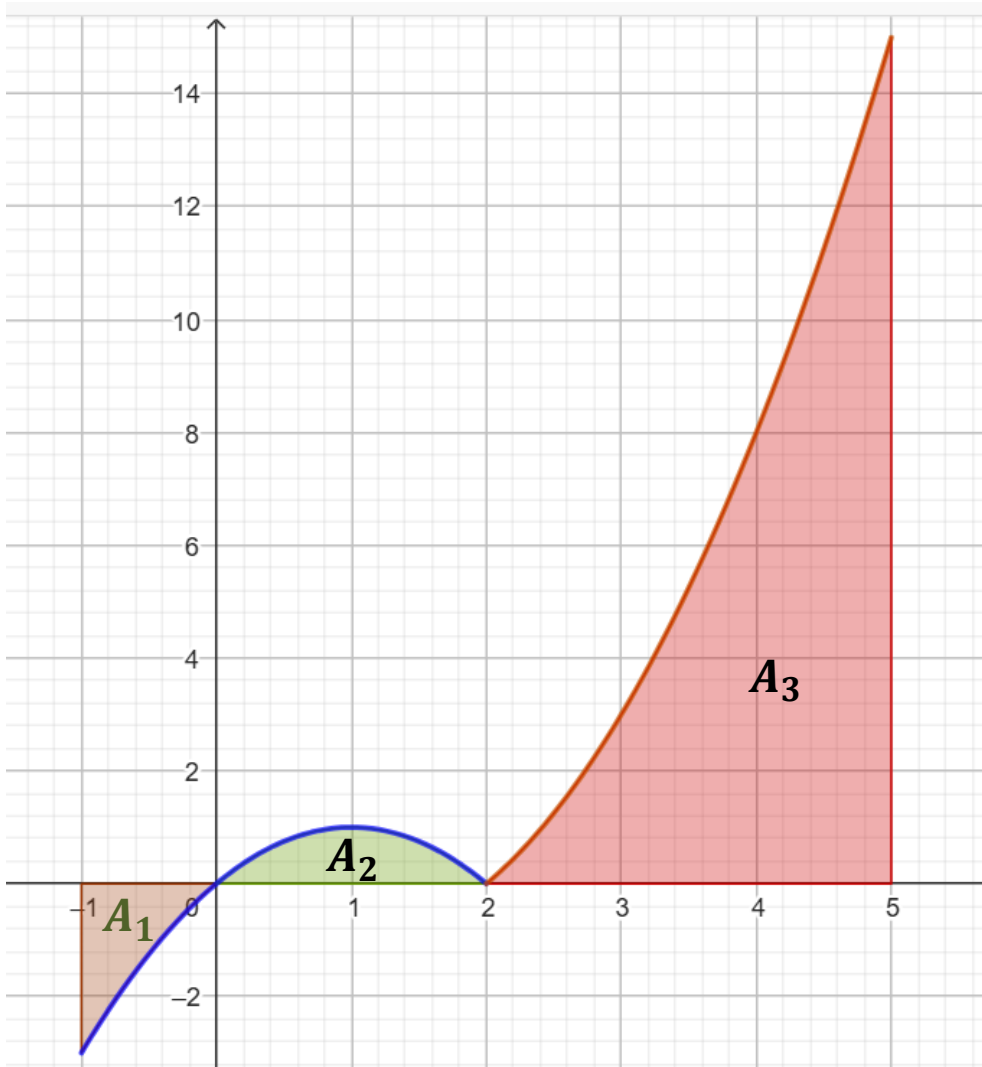
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

x	$f(x) = -x^2 + 2x$
-1	-3
0	0
1	1
2	0

x	$f(x) = x^2 - 2x$
2	0
3	3
4	8
5	15

Ejercicio 4.2

4.2.2 Calcular el área de la región anterior.



Como se puede comprobar hay 3 regiones diferenciadas. Por lo que debo calcular el área de cada región por separado y luego sumaras. Debes tener cuidado con la primera región, ya que el valor de la integral será negativo, pero debo tomar su valor absoluto porque no se aceptan valores negativos del área.

Las integrales que hay que calcular son:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 -x^2 + 2x \, dx \right|$$

$$A_2 = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx$$

$$A_3 = \int_2^5 x^2 - 2x \, dx$$

Ejercicio 4.2

4.2.2 Calcular el área de la región anterior.

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 -x^2 + 2x \, dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 \right| = \left| \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2 \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) \right| = \left| 0 - \left(\frac{4}{3} \right) \right| = \frac{4}{3} \, u. a.$$

$$A_2 = \int_0^2 -x^2 + 2x \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2 \right) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} \, u. a.$$

$$A_3 = \int_2^5 x^2 - 2x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 5^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = \frac{125}{3} - 25 - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = 18 \, u. a.$$

Calculo el área pedida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{4 + 4 + 54}{3} = \frac{62}{3} \, u. a.$$

El área de la región anterior es: $\frac{62}{3}$ **unidades de área**