



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Probabilidad

Junio 2025 - RESERVA

Problema 1



PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1

Una firma automovilística fabrica tres modelos de coche: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.

En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de Alemania un 24% del M1, un 40% del M2 y un 36% del M3.

El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

$M1 = \{\text{Modelo M1}\}$ $M2 = \{\text{Modelo M2}\}$ $M3 = \{\text{Modelo M3}\}$

$EEUU = \{\text{Modelo fabricado en EEUU}\}$ $Ch = \{\text{Modelo fabricado en China}\}$ $Al = \{\text{Modelo fabricado en Alemania}\}$

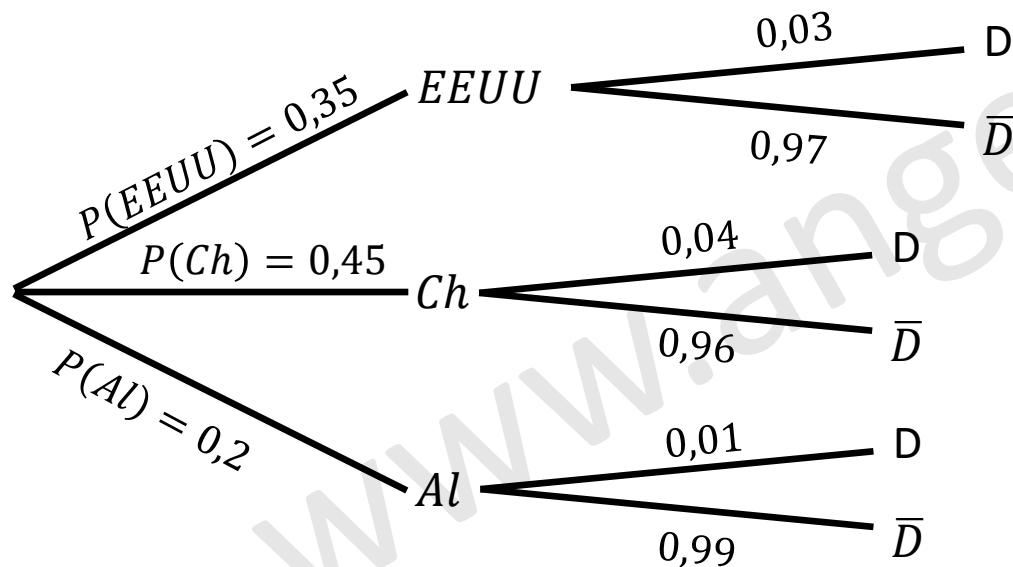
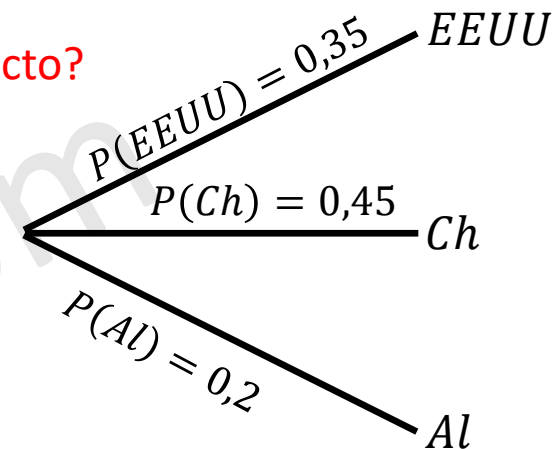
$D = \{\text{Modelo defectuoso}\}$ $\bar{D} = \{\text{Modelo no defectuoso}\}$

Se representa el diagrama de árbol correspondiente a lo que nos preguntan en el apartado 1.1.

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

“Una firma automovilística fabrica tres modelos de coche: M1, M2 y M3, y produce un 35% de vehículos en Estados Unidos, un 45% en China y un 20% en Alemania.”

“El control de calidad ha detectado que en Estados Unidos un 3% de los coches presenta algún tipo de defecto, en China un 4% y en Alemania un 1%.”



Ojo a la trampa que nos han puesto. Hay que utilizar sólo los datos del primer y del tercer párrafo.

PREGUNTA 1

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto?

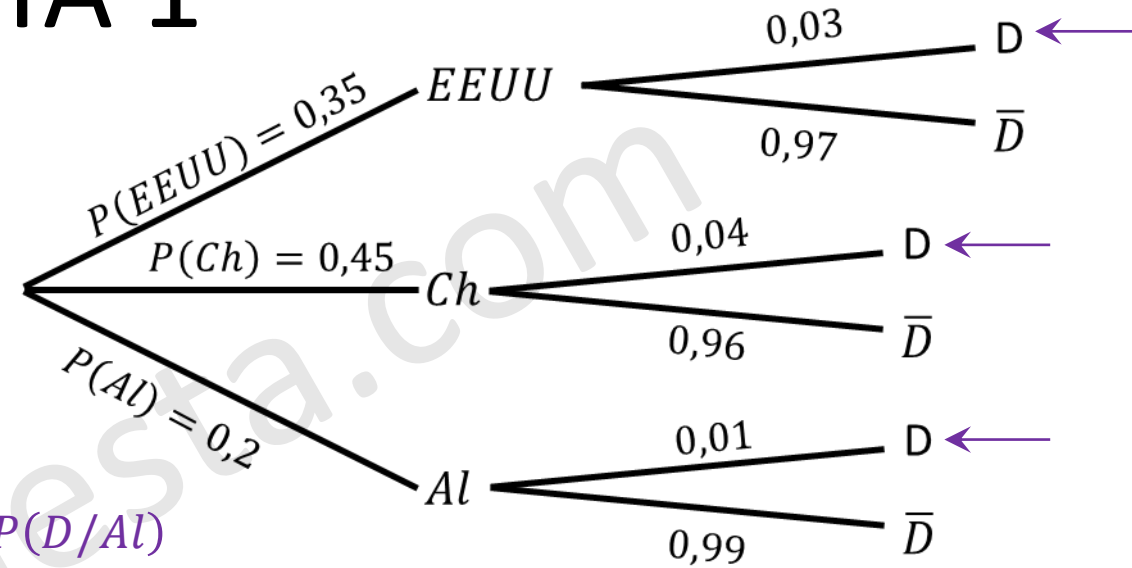
Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(EUUU \cap D) + P(Ch \cap D) + P(Al \cap D)$$

$$P(D) = P(EUUU) \cdot P(D/EUUU) + P(Ch) \cdot P(D/Ch) + P(Al) \cdot P(D/Al)$$

$$P(D) = 0,35 \cdot 0,03 + 0,45 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,01 = 0,0305$$

La probabilidad de que un coche seleccionado al azar presente algún tipo de defecto es **0,0305 (3,05%)**.



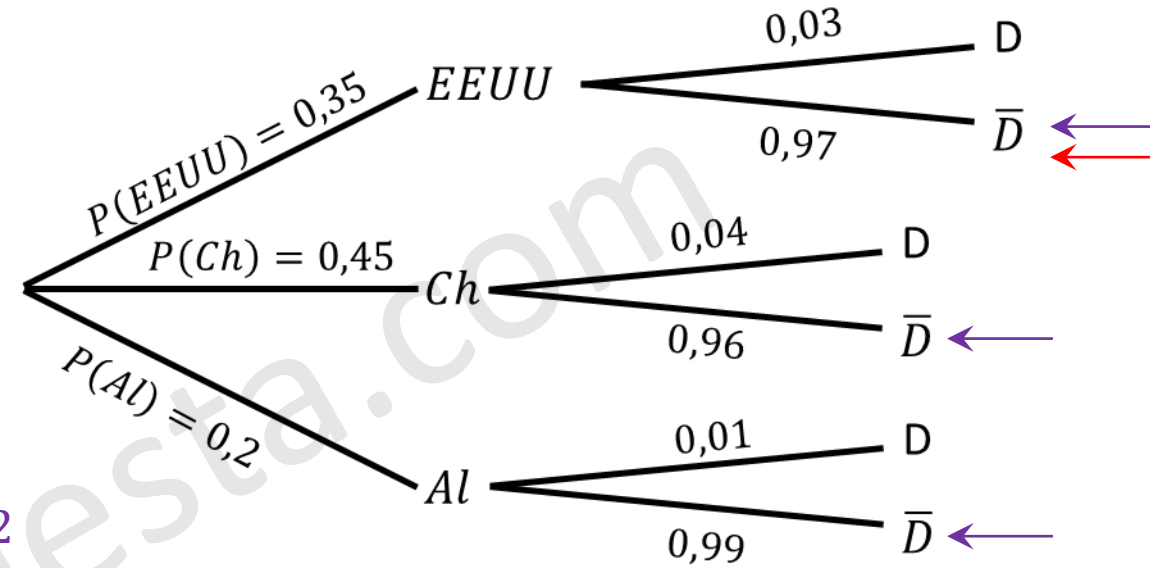
1.2 Si un coche no presenta ningún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos?

Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad a posteriori).

$$P(EEUU/\bar{D}) = \frac{P(EEUU \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$P(EEUU/\bar{D}) = \frac{P(EEUU) \cdot P(\bar{D}/EEUU)}{1 - P(D)} = \frac{0,35 \cdot 0,97}{1 - 0,0305} \approx 0,3502$$

Si un coche no presenta ningún defecto, la probabilidad de que esté fabricado en Estados Unidos es **0,3502 (35,02%)** aproximadamente.



1.3 Dados 9 coches fabricados en Alemania, calcular la probabilidad de que al menos 3 sean del modelo M2.

“En la planta de Estados Unidos se fabrican un 38% de vehículos del modelo M1, un 42% del M2 y un 20% del M3; en la de China un 42% del M1, un 40% del M2 y un 18% del M3; y en la de **Alemania** un 24% del M1, **un 40% del M2** y un 36% del M3.”

Suponemos que, para cada coche fabricado en Alemania, la probabilidad de que sea M2 es 0,40 e independiente entre coches (población muy grande).

Definimos la variable aleatoria X: **X**=número de coches fabricados del modelo M2.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 9; p = 0,4; q = 0,6$ **$X \sim Bi(9; 0,4)$**

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

Utilizando la tabla que proporcionan en el examen. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,2318 = 0,7682$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
9	0		0,9135	0,6302	0,3874	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1		0,9966	0,9288	0,7748	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2		0,9999	0,9916	0,9470	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3		1,0000	0,9994	0,9917	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	1,0000	0,9991	0,9804	0,9511	0,9012	0,8552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000

La probabilidad que al menos 3 sean del modelo M2 es **0,7682 (76,82%)**.

NOTA: Puedes hacer el cálculo de la probabilidad usando la fórmula, pero es más largo.



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

Junio 2025 – RESERVA

Problema 2.1



2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases} \quad \text{donde } \alpha \text{ es un parámetro real.}$$

2.1.1 Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de A en función de α mediante un determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 11\alpha + 11$$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $11\alpha + 11 = 0 \longrightarrow \alpha = -1$

Si $\alpha \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3$ $\xrightarrow[3 \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3}$ $\text{Ran}(A^*) = 3$

Si $\alpha = -1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $\alpha = -1$ en las matrices A y A^* .

Ejercicio 2.1

2.1.1 Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

Si $\alpha = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2+2F_1 \\ F_3=3F_3-2F_1}]{\substack{F_2=3F_2+2F_1 \\ F_3=3F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ 0 & 11 & 1 & 72 \\ 0 & -11 & -1 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ 0 & 11 & 1 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array} \right)$

$3F_2$	-6	3	3	12
$2F_1$	6	8	-2	60
$F_2=3F_2+2F_1$	0	11	1	72

F_3	0	-11	-1	-30
F_2	0	11	1	72
$F_3=F_3+F_2$	0	0	0	42

$3F_3$	6	-3	-3	30
$-2F_1$	-6	-8	2	-60
$F_3=3F_3-2F_1$	0	-11	-1	-30

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $\alpha = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $\alpha \neq -1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\alpha = -1$	2	3	3	S.I.	Sin solución

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

2.1.2 Obtener las cantidades x, y, z en el caso de que el sistema sea compatible.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $\alpha = -1$. Resolveré el sistema en función de α . Se utilizará la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 11\alpha + 11$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{70}{11\alpha + 11} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 30 & \alpha \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{44\alpha + 30}{11\alpha + 11}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{154}{11\alpha + 11} = \frac{154}{11 \cdot (\alpha + 1)} = \frac{14}{\alpha + 1}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{70}{11\alpha + 11}, \frac{44\alpha + 30}{11\alpha + 11}, \frac{14}{\alpha + 1} \right); \alpha \neq -1$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

Junio 2025 – RESERVA
Problema 2.2



Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.1 Calcular el producto AB y la matriz transpuesta de AB .

Se calcula el producto aplicando la propiedad del producto de matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + m \cdot 1 & 1 \cdot 2 + m \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ -1 + m & 2 + 5m \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz transpuesta pedida, cambiando filas por columnas.

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 + m \\ 19 & 2 + 5m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.2 En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

Una matriz cuadrada es invertible cuando el valor de su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3 = 0 \longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\exists A^{-1} \forall m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Se calcula la matriz inversa por el método de los adjuntos.

$$\text{Matriz de los adjuntos: } Adj(A) = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos transpuesta: } (Adj(A))^T = \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^T = \frac{1}{2m-3} \cdot \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

Se despeja X de la ecuación matricial. $B \cdot X + A^2 = C \longrightarrow B \cdot X = C - A^2$

Se multiplica por la inversa de B a ambos lados de la ecuación.

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot (C - A^2) \longrightarrow I \cdot X = B^{-1} \cdot (C - A^2) \longrightarrow X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$$

Calculo la matriz inversa de B por el método de los adjuntos. Compruebo si existe la matriz inversa de B .

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0 \quad \exists B^{-1}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos: } Adj(B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos transpuesta: } (Adj(B))^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$. $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$

Matriz inversa: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^T = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Se calcula A^2 : $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot m \\ 1 \cdot 2 + m \cdot 1 & 1 \cdot 3 + m \cdot m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix}$

Se calcula $C - A^2$: $C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix}$

Se calcula $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$: $X = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix}$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-7) + (-2) \cdot (3 - m) & 5 \cdot (-7 - 3m) + (-2) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot (-7) + (-1) \cdot (3 - m) & (-1) \cdot (-7 - 3m) + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -41 + 2m & -29 - 15m \\ 4 + m & 10 + 3m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$. $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -41 + 2m & -29 - 15m \\ 4 + m & 10 + 3m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{41 - 2m}{7} & \frac{29 + 15m}{7} \\ \frac{-4 - m}{7} & \frac{-10 - 3m}{7} \end{pmatrix}$$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

Junio 2025 · RESERVA
Problema 3.1



Ejercicio 3.1

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + a \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|a + 11|}{\sqrt{a^2 + 5}}$$

La distancia del punto P a π es: $\frac{|a + 11|}{\sqrt{a^2 + 5}}$ *unidades*

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$

3.1.2 Para $a=4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

Utilizaremos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, -1) = (2, 4, -1)$

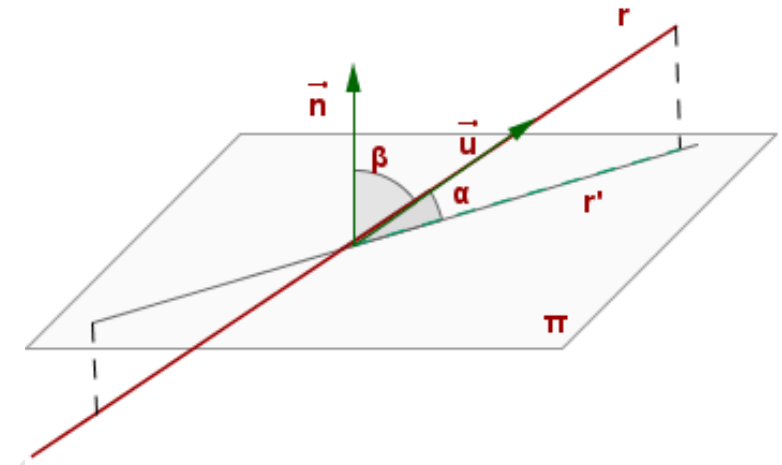
Calculo el vector director de la recta. $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k} = (21, -9, 6) \equiv (7, -3, 2)$

Se calcula el ángulo pedido (α), teniendo en cuenta que el ángulo pedido no es el que hay entre vectores (β), sino que es el ángulo entre la recta y el plano (α).

$$\cos(\beta) = \text{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(2, 4, -1) \cdot (7, -3, 2)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|2 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{62}} = 0$$

$$\alpha = \arcsen(0) = 0^\circ$$

El ángulo que forman, para $a = 4$, la recta y el plano es 0° .



3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.3 Para $a=3$, calcular el punto simétrico del punto $(9/2, 5, -1)$ respecto del plano π .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por Q .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto Q . $\vec{v}_s = \vec{n} = (2, 3, -1)$ $Q = (9/2, 5, -1)$

2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán: $s: \begin{cases} x = 9/2 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

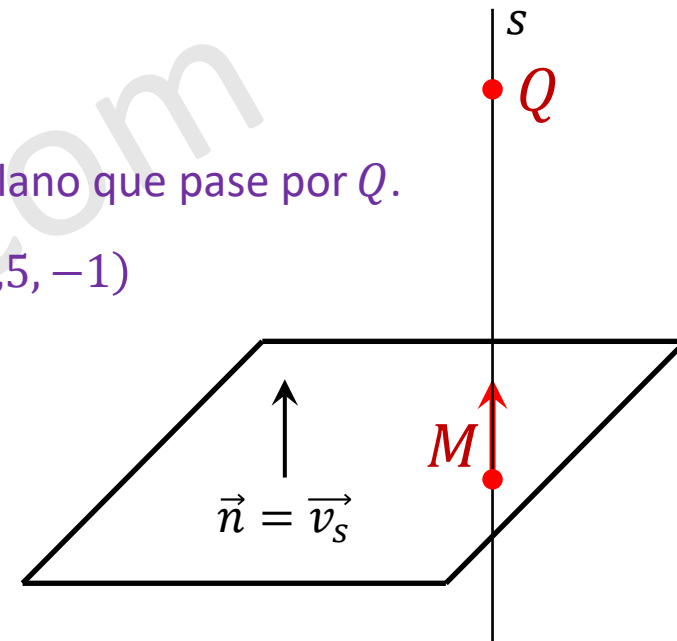
3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano π .

Se sustituye s en π :

$$2x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3 \cdot (5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = -2$ en s . $M: \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2 \cdot (-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3 \cdot (-2) = -1 \\ z = -1 - \lambda = -1 - (-2) = 1 \end{cases}$

$$M = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$



3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.3 Para $a=3$, calcular el punto simétrico del punto $(9/2, 5, -1)$ respecto del plano π .

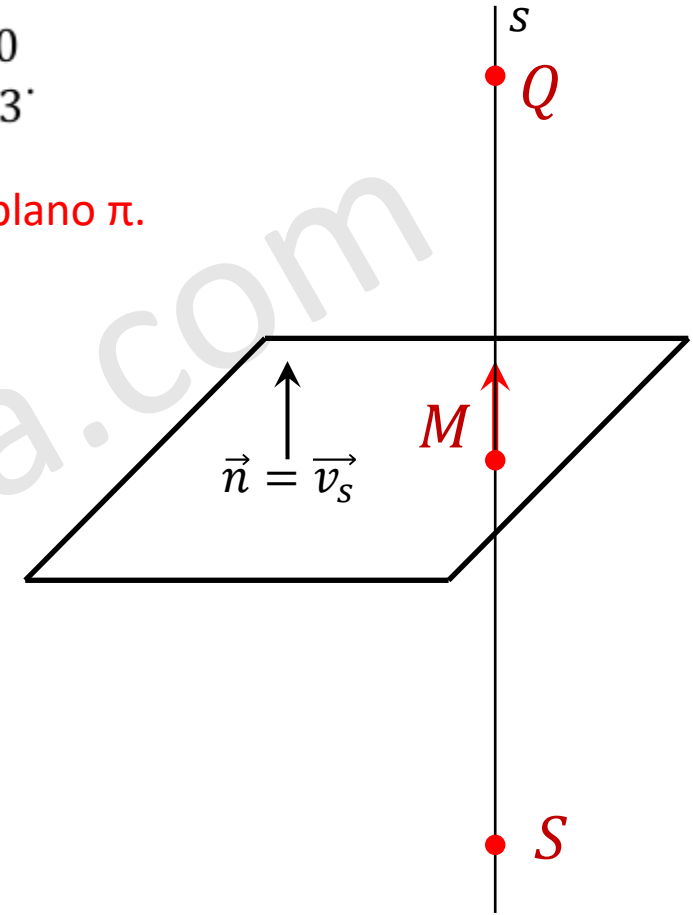
4) Se calcula el punto simétrico de Q respecto de M .

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las componentes de los vectores coinciden con las coordenadas de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1 \right) = \left(\frac{-7}{2}, -7, 3 \right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es: $\left(\frac{-7}{2}, -7, 3 \right)$





PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

Junio 2025 • RESERVA

Problema 3.2



Ejercicio 3.2

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.1 (1.25 puntos) Calcular el valor del parámetro α para el que r y s son perpendiculares.

3.2.2 (1.25 puntos) Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada z vale 0.

Deduzco de la ecuación de r su vector director. $\vec{v}_r = (2, 3, \alpha)$

El vector director de s se calcula: $\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 0\vec{j} - 3\vec{k} = (-3, 0, -3) \equiv (1, 0, 1)$

Las dos rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores directores es nulo.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (2, 3, \alpha) \cdot (1, 0, 1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + \alpha \cdot 1 = 2 + \alpha = 0 \longrightarrow \alpha = -2$$

El valor pedido es $\alpha = -2$.

Ejercicio 3.2

3.2 Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\alpha}$, que depende del parámetro real α , y la recta

$$s: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

3.2.2 Suponiendo que $\alpha \neq 0$, obtener la recta paralela a s que pase por el punto de r cuya coordenada $z = 0$.

Ya se había calculado el vector director de la recta s . Dicho vector será el director de la recta pedida. $\vec{v}_s = (1, 0, 1)$

Para obtener el punto de r , se sustituye z por 0 y se despejan x e y . $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{0}{\alpha} \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ y-2=0 \rightarrow y=2 \end{cases}$

El punto de r , con $z = 0$ es: $P = (-1, 2, 0)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son $t: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathcal{R}$



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones

Junio 2025 – RESERVA
Problema 4.1





Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



Ejercicio 4.1

4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 **(1.5 puntos)** Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 **(0.5 puntos)** Hallar dicho volumen.

www.angelcu

4.1.1 Expresar el área total del prisma en función de x y h .

Se representa un esquema del prisma triangular

Se hace un esquema del triángulo equilátero.

Se definen las variables del problema x : Longitud de los lados de la base del prisma en cm;

h : Altura del prisma en cm;

a : Altura del triángulo equilátero (base).

Se obtiene la expresión del área total del prisma en función de x y h .

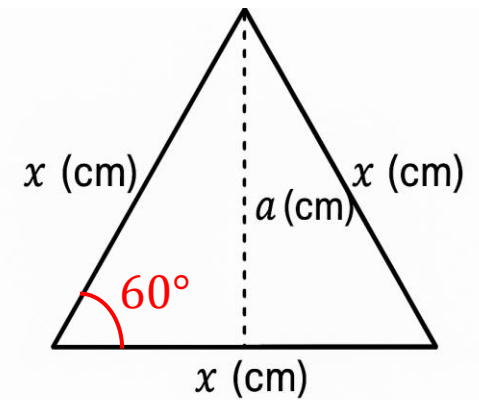
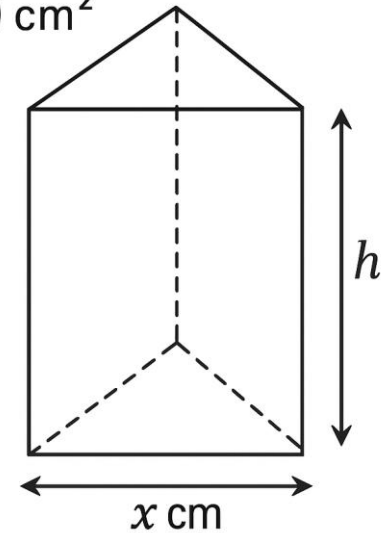
Calculo la altura de la base en función de x . $\text{sen}(60^\circ) = \frac{a}{x} \rightarrow a = x \cdot \text{sen}(60^\circ)$

El área de las dos bases es: $A_{Bases} = 2 \cdot \frac{x \cdot a}{2} = x \cdot x \cdot \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{2}$

El área lateral es: $A_{Lateral} = 3 \cdot x \cdot h$

La expresión que relaciona el área total del prisma en función de x y h es: $\frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{2} + 3 \cdot x \cdot h = 10$

Área total = 10 cm^2
(dado)



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

Área total = 10 cm^2
(dato)

El volumen del prisma es: $V = A_{Base} \cdot h = \frac{x \cdot a}{2} \cdot h = \frac{x \cdot x \cdot \text{sen}(60^\circ)}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot h$

Se despeja la altura del prisma de la ecuación obtenida anteriormente.

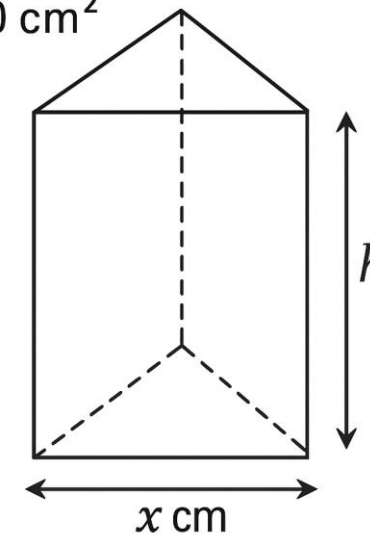
$$\frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} + 3 \cdot x \cdot h = 10 \rightarrow 3 \cdot x \cdot h = 10 - \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \rightarrow h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6}$$

Se expresa el volumen del prisma en función de x :

$$V(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot \left(\frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Además de la expresión analítica de la función del volumen, necesito encontrar su dominio de definición.

$$\begin{cases} x > 0 \\ h > 0 \end{cases} \rightarrow h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} > 0 \rightarrow h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} > 0 \xrightarrow{x > 0} 20 - \sqrt{3}x^2 > 0$$



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

Calculo el dominio resolviendo la inecuación de segundo grado. $20 - \sqrt{3}x^2 > 0$

Se iguala la expresión a cero y se hace un estudio de signos de la expresión cuadrática.

$$20 - \sqrt{3}x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \xrightarrow{x > 0} x = + \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \approx 3,3996 \text{ cm}$$

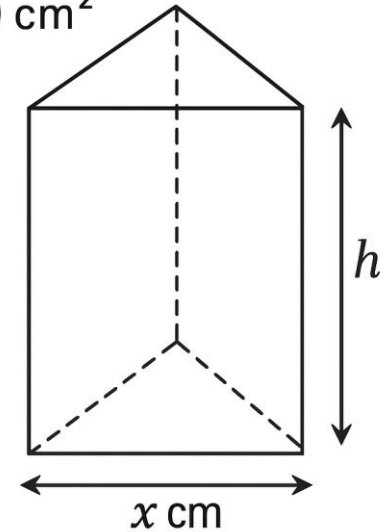
	0	$\sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$	$+\infty$
$20 - \sqrt{3}x^2$		+	-

$$20 - \sqrt{3}x^2 \xrightarrow{x=1} 20 - \sqrt{3} > 0$$

$$20 - \sqrt{3}x^2 \xrightarrow{x=10} 20 - 100\sqrt{3} < 0$$

Siendo el dominio de $V(x)$: $x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}\right)$

Área total = 10 cm^2
(dado)



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

$$V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Se deriva la función, se iguala a cero y se hace un estudio de signos de $V(x)$ en su dominio de definición.

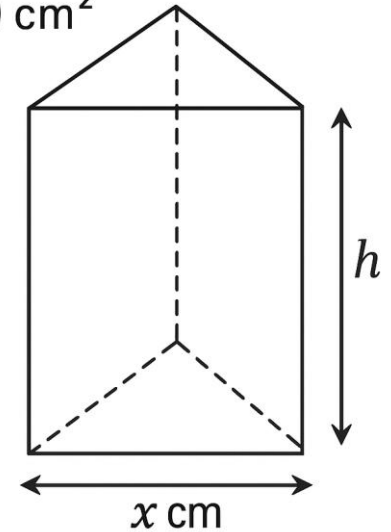
$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 = 0 \rightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \xrightarrow{x > 0} x = +\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \approx 1,9619 \text{ cm}$$

	0	$\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$
$V'(x)$		+	-
$V(x)$			

$$V'(1) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8} > 0$$

$$V'(3) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8} \cdot 3^2 < 0$$

Área total = 10 cm^2
(dato)



El valor de x que maximiza el volumen es: $x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \text{ cm} \approx \mathbf{1,9619 \text{ cm}}$

El valor de h que maximiza el volumen es:

$$h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} = \frac{10}{3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}}{6} \approx \mathbf{1,1327 \text{ cm}}$$

Ejercicio 4.1

4.1.3 Hallar dicho volumen.

Recordamos que: $V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$ $x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \approx 1,9619 \text{ cm}$

Se calcula el volumen máximo: $V\left(\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}\right)^3 \approx 1,8878 \text{ cm}^3$

El volumen máximo es, aproximadamente, **1,8878 cm³**



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMATICAS II

Análisis de funciones

Junio 2025 - RESERVA

Problema 4.2



Ejercicio 4.2

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 **(0.5 puntos)** Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 **(0.75 puntos)** Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 **(0.5 puntos)** Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 **(0.75 puntos)** Calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$.

www.angelcuesta.com

a) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0} + 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0^+} + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0^+} + 1 = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(+\infty)^2} + \infty = 0 + \infty = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(-\infty)^2} - \infty = 0 - \infty = -\infty$$

Por consiguiente $f(x)$ no tiene asíntota horizontal.

a) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Puesto que la función no tiene asíntota horizontal, se debe comprobar si tiene asíntota oblicua.

Para ello, utilizaré la fórmula que me permite calcular su pendiente y ordenada en el origen. Si su pendiente es un número distinto de cero, eso me indicará que tiene asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(x-1)^2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x \cdot (x-1)^2} + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x \cdot (x-1)^2} + 1 = \frac{4}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Por consiguiente $y = x$ es asíntota oblicua de $f(x)$.

NOTA: Observa que el valor de los límites es el mismo tanto cuando $x \rightarrow +\infty$ como $x \rightarrow -\infty$.

4.2.2 Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1$$

Igualo la derivada a cero:
$$\frac{-8}{(x-1)^3} + 1 = 0 \rightarrow \frac{-8}{(x-1)^3} = -1 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3$$

Se estudia el signo de la derivada.
$$f'(0) = \frac{-8}{(0-1)^3} + 1 > 0 \quad f'(2) = \frac{-8}{(2-1)^3} + 1 < 0 \quad f'(4) = \frac{-8}{(4-1)^3} + 1 > 0$$

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$f(x)$ **decrece** en $x \in (1, 3)$

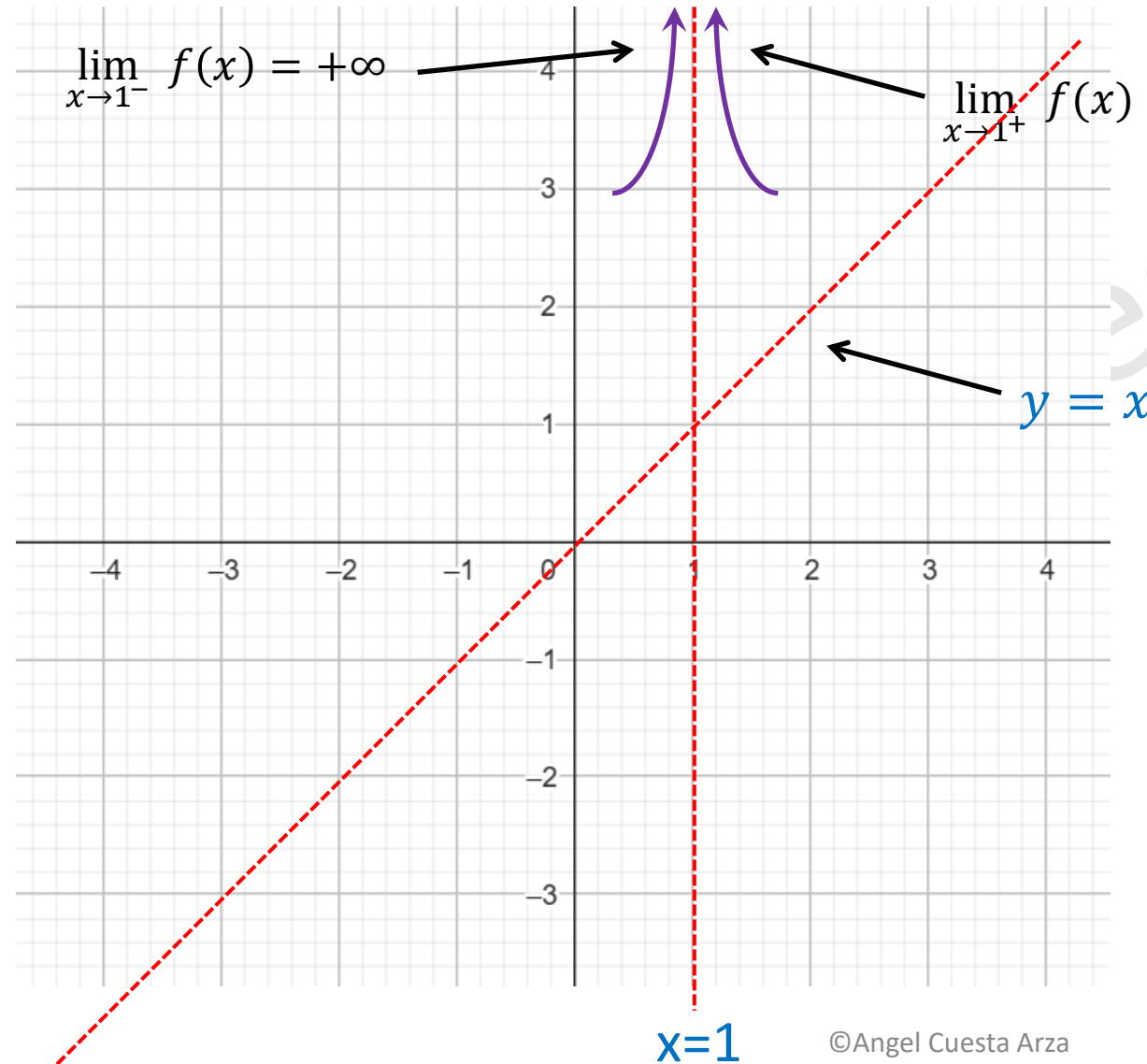
En $x = 3$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo.
$$f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 1 + 3 = 4$$

$f(x)$ **tiene un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

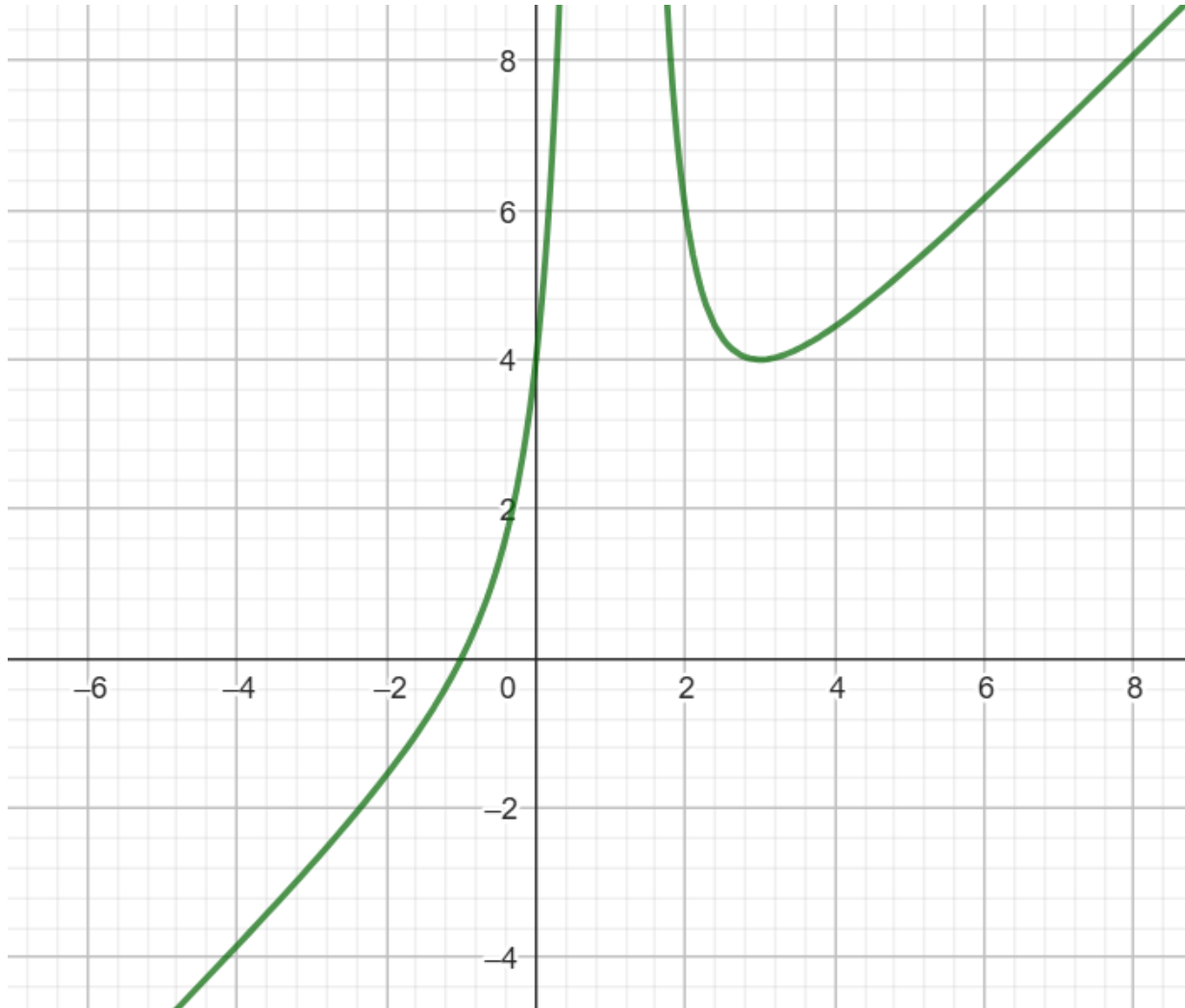
No presenta máximo relativo ya que $x = 1$ no pertenece al dominio de $f(x)$.

4.2.3 Representar gráficamente la función $y = f(x)$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Se hace en primer lugar una representación de las asíntotas para saber, más o menos, por donde transcurrirá la gráfica de la función.



4.2.3 Representar gráficamente la función $y = f(x)$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$



Este sería el esbozo de la gráfica. Es fundamental que coloques el mínimo relativo en el punto exacto donde se encuentra ya que ha sido calculado.

El resto de la gráfica no es tan importante que pase por los puntos exactos.

Puedes calcular el punto de corte con el eje Y si lo necesitas.

4.2.4 Calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

La integral es prácticamente inmediata. Basta con aplicar algunas propiedades de las integrales y de las potencias.

$$\int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \int \frac{4}{(x-1)^2} dx + \int x dx = 4 \cdot \int (x-1)^{-2} dx + \int x dx = 4 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} = \frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$$