



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Sistemas de ecuaciones

Junio 2025 – RESERVA

Problema 2.1



2.1 Una empresa de producción agrícola desarrolla fertilizantes que combinan tres nutrientes esenciales: nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K). Se representan por x , y , z las cantidades en kilogramos a usar por lote de N, P, K, respectivamente. Estas cantidades deben cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases} \quad \text{donde } \alpha \text{ es un parámetro real.}$$

2.1.1 Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché–Frobenius.

Se definen las matrices (de coeficientes y ampliada).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & \alpha & 10 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de A en función de α mediante un determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 11\alpha + 11$$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación. $11\alpha + 11 = 0 \longrightarrow \alpha = -1$

Si $\alpha \neq -1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow[3 \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3]{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $\alpha = -1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo $\alpha = -1$ en las matrices A y A^* .

Ejercicio 2.1

2.1.1 Discutir, en función del parámetro α , el sistema de ecuaciones anterior.

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para $\alpha = -1$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

Si $\alpha = -1 \rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2+2F_1 \\ F_3=3F_3-2F_1}]{\substack{F_2=3F_2+2F_1 \\ F_3=3F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ 0 & 11 & 1 & 72 \\ 0 & -11 & -1 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 30 \\ 0 & 11 & 1 & 72 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array} \right)$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_A$ $\underbrace{\quad\quad\quad}_A$

$3F_2$	-6	3	3	12
$2F_1$	6	8	-2	60
$F_2=3F_2+2F_1$	0	11	1	72

F_3	0	-11	-1	-30
F_2	0	11	1	72
$F_3=F_3+F_2$	0	0	0	42

$3F_3$	6	-3	-3	30
$-2F_1$	-6	-8	2	-60
$F_3=3F_3-2F_1$	0	-11	-1	-30

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene tres filas linealmente independientes. Para $\alpha = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen para dar la solución al apartado 2.1.1. Se aplica el teorema de Rouché–Frobenius para definir el tipo de sistema.

	Ran(A)	Ran(A*)	N.º incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $\alpha \neq -1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\alpha = -1$	2	3	3	S.I.	Sin solución

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases}$$

2.1.2 Obtener las cantidades x, y, z en el caso de que el sistema sea compatible.

Como ya demostramos, el sistema es compatible determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $\alpha = -1$. Resolveré el sistema en función de α . Se utilizará la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 11\alpha + 11$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 4 & \alpha \\ 4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{70}{11\alpha + 11} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 30 & \alpha \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 10 & \alpha \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{44\alpha + 30}{11\alpha + 11}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 30 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix}}{11\alpha + 11} = \frac{154}{11\alpha + 11} = \frac{154}{11 \cdot (\alpha + 1)} = \frac{14}{\alpha + 1}$$

La solución del sistema es: $(x, y, z) = \left(\frac{70}{11\alpha + 11}, \frac{44\alpha + 30}{11\alpha + 11}, \frac{14}{\alpha + 1} \right); \alpha \neq -1$