



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

Junio 2025 – RESERVA
Problema 2.2



Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.1 Calcular el producto AB y la matriz transpuesta de AB .

Se calcula el producto aplicando la propiedad del producto de matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) + m \cdot 1 & 1 \cdot 2 + m \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 19 \\ -1 + m & 2 + 5m \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz transpuesta pedida, cambiando filas por columnas.

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 + m \\ 19 & 2 + 5m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.2 En los casos en los que A es invertible, calcular la inversa de A .

Una matriz cuadrada es invertible cuando el valor de su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 3 = 0 \longrightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$\exists A^{-1} \forall m \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Se calcula la matriz inversa por el método de los adjuntos.

$$\text{Matriz de los adjuntos: } Adj(A) = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos transpuesta: } (Adj(A))^T = \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz inversa: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^T = \frac{1}{2m-3} \cdot \begin{pmatrix} m & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2m-3} & \frac{-3}{2m-3} \\ \frac{-1}{2m-3} & \frac{2}{2m-3} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$.

Se despeja X de la ecuación matricial. $B \cdot X + A^2 = C \longrightarrow B \cdot X = C - A^2$

Se multiplica por la inversa de B a ambos lados de la ecuación.

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot (C - A^2) \longrightarrow I \cdot X = B^{-1} \cdot (C - A^2) \longrightarrow X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$$

Calculo la matriz inversa de B por el método de los adjuntos. Compruebo si existe la matriz inversa de B .

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7 \neq 0 \quad \exists B^{-1}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos: } Adj(B) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz de los adjuntos transpuesta: } (Adj(B))^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$. $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$

Matriz inversa: $B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{Adj}(B))^T = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Se calcula A^2 : $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot m \\ 1 \cdot 2 + m \cdot 1 & 1 \cdot 3 + m \cdot m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix}$

Se calcula $C - A^2$: $C - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 6 + 3m \\ 2 + m & 3 + m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix}$

Se calcula $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$: $X = \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -7 - 3m \\ 3 - m & -3 \end{pmatrix}$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot (-7) + (-2) \cdot (3 - m) & 5 \cdot (-7 - 3m) + (-2) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot (-7) + (-1) \cdot (3 - m) & (-1) \cdot (-7 - 3m) + (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -41 + 2m & -29 - 15m \\ 4 + m & 10 + 3m \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & m^2 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real.

2.2.3 Resolver la ecuación matricial $BX + A^2 = C$. $X = B^{-1} \cdot (C - A^2)$

$$X = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -41 + 2m & -29 - 15m \\ 4 + m & 10 + 3m \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{41 - 2m}{7} & \frac{29 + 15m}{7} \\ \frac{-4 - m}{7} & \frac{-10 - 3m}{7} \end{pmatrix}$$