



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

Junio 2025 · RESERVA
Problema 3.1



Ejercicio 3.1

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.1 (0.75 puntos) Calcular la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano π , en función del parámetro real a .

3.1.2 (0.75 puntos) Para $a = 4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

3.1.3 (1 punto) Para $a = 3$, calcular el punto simétrico del punto $\left(\frac{9}{2}, 5, -1\right)$ respecto del plano π .

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + a \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 3|}{\sqrt{2^2 + a^2 + (-1)^2}} = \frac{|a + 11|}{\sqrt{a^2 + 5}}$$

La distancia del punto P a π es: $\frac{|a + 11|}{\sqrt{a^2 + 5}}$ *unidades*

3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$

3.1.2 Para $a=4$, calcular el ángulo que forma la recta r con el plano π .

Utilizaremos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, a, -1) = (2, 4, -1)$

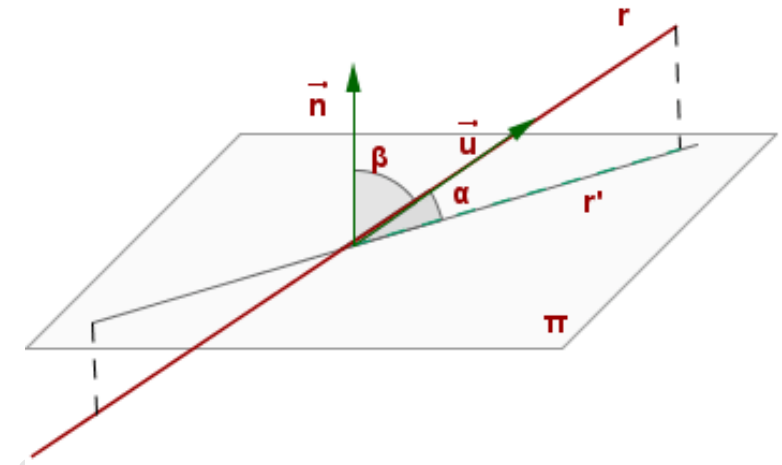
Calculo el vector director de la recta. $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 21\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k} = (21, -9, 6) \equiv (7, -3, 2)$

Se calcula el ángulo pedido (α), teniendo en cuenta que el ángulo pedido no es el que hay entre vectores (β), sino que es el ángulo entre la recta y el plano (α).

$$\cos(\beta) = \text{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(2, 4, -1) \cdot (7, -3, 2)|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{7^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|2 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{62}} = 0$$

$$\alpha = \arcsen(0) = 0^\circ$$

El ángulo que forman, para $a = 4$, la recta y el plano es 0° .



3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.3 Para $a=3$, calcular el punto simétrico del punto $(9/2, 5, -1)$ respecto del plano π .

Hacemos un esquema de la situación. Se calculará una recta auxiliar perpendicular al plano que pase por Q .

1) Anotamos el vector director de la recta y el punto Q . $\vec{v}_s = \vec{n} = (2, 3, -1)$ $Q = (9/2, 5, -1)$

2) Las ecuaciones paramétricas de dicha recta serán: $s: \begin{cases} x = 9/2 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$

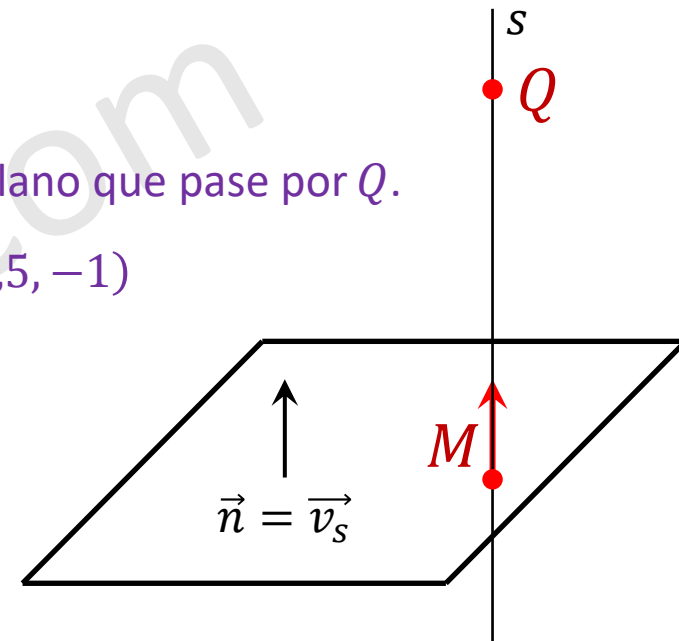
3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano π .

Se sustituye s en π :

$$2x + 3y - z + 3 = 0 \rightarrow 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + 2\lambda\right) + 3 \cdot (5 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + 3 = 0 \rightarrow 14\lambda + 28 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

Se obtiene el punto M , sustituyendo $\lambda = -2$ en s . $M: \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 2 \cdot (-2) = \frac{1}{2} \\ y = 5 + 3 \cdot (-2) = -1 \\ z = -1 - \lambda = -1 - (-2) = 1 \end{cases}$

$$M = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$



3.1 Dados el plano $\pi \equiv 2x + ay - z + 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -x + y + 5z = 3 \end{cases}$.

3.1.3 Para $a=3$, calcular el punto simétrico del punto $(9/2, 5, -1)$ respecto del plano π .

4) Se calcula el punto simétrico de Q respecto de M .

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS} \rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OS} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}$$

Se sustituye, teniendo en cuenta que las componentes de los vectores coinciden con las coordenadas de los puntos.

$$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}, -1, 1 \right) - \left(\frac{9}{2}, 5, -1 \right) = \left(\frac{-7}{2}, -7, 3 \right)$$

El punto simétrico de P respecto del plano π es: $\left(\frac{-7}{2}, -7, 3 \right)$

