



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones

Junio 2025 – RESERVA
Problema 4.1





Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



Ejercicio 4.1

4.1 Se considera un prisma triangular de altura h cm, cuya base es un triángulo equilátero de lado x cm. El prisma tiene área total (área que incluye el área de las caras laterales y de las bases superior e inferior) igual a 10 cm^2 . Se pide:

4.1.1 **(0.5 puntos)** Expresar el área total del prisma en función de x y h .

4.1.2 **(1.5 puntos)** Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

4.1.3 **(0.5 puntos)** Hallar dicho volumen.

www.angelcu

4.1.1 Expresar el área total del prisma en función de x y h .

Se representa un esquema del prisma triangular

Se hace un esquema del triángulo equilátero.

Se definen las variables del problema x : Longitud de los lados de la base del prisma en cm;

h : Altura del prisma en cm;

a : Altura del triángulo equilátero (base).

Se obtiene la expresión del área total del prisma en función de x y h .

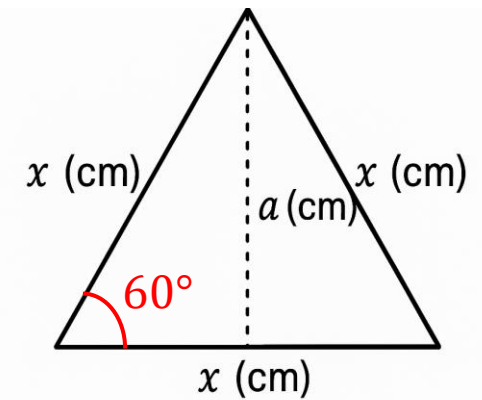
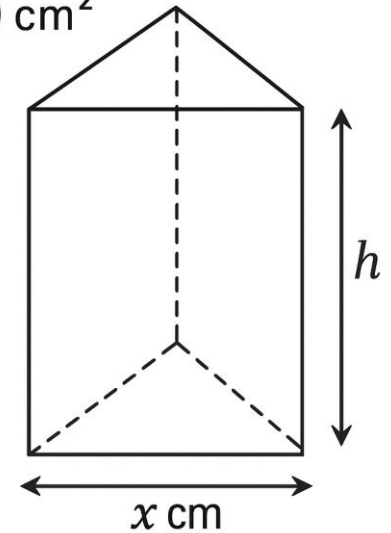
Calculo la altura de la base en función de x . $\text{sen}(60^\circ) = \frac{a}{x} \rightarrow a = x \cdot \text{sen}(60^\circ)$

El área de las dos bases es: $A_{Bases} = 2 \cdot \frac{x \cdot a}{2} = x \cdot x \cdot \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{2}$

El área lateral es: $A_{Lateral} = 3 \cdot x \cdot h$

La expresión que relaciona el área total del prisma en función de x y h es: $\frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{2} + 3 \cdot x \cdot h = 10$

Área total = 10 cm^2
(dado)



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

Área total = 10 cm^2
(dato)

El volumen del prisma es: $V = A_{Base} \cdot h = \frac{x \cdot a}{2} \cdot h = \frac{x \cdot x \cdot \text{sen}(60^\circ)}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot h$

Se despeja la altura del prisma de la ecuación obtenida anteriormente.

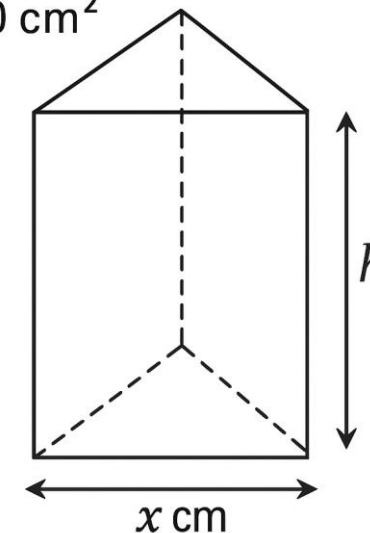
$$\frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} + 3 \cdot x \cdot h = 10 \rightarrow 3 \cdot x \cdot h = 10 - \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \rightarrow h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6}$$

Se expresa el volumen del prisma en función de x :

$$V(x) = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot x^2}{4} \cdot \left(\frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Además de la expresión analítica de la función del volumen, necesito encontrar su dominio de definición.

$$\begin{cases} x > 0 \\ h > 0 \end{cases} \rightarrow h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} > 0 \rightarrow h = \frac{20 - \sqrt{3}x^2}{6x} > 0 \xrightarrow{x > 0} 20 - \sqrt{3}x^2 > 0$$



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

Calculo el dominio resolviendo la inecuación de segundo grado. $20 - \sqrt{3}x^2 > 0$

Se iguala la expresión a cero y se hace un estudio de signos de la expresión cuadrática.

$$20 - \sqrt{3}x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \xrightarrow{x > 0} x = + \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}} \approx 3,3996 \text{ cm}$$

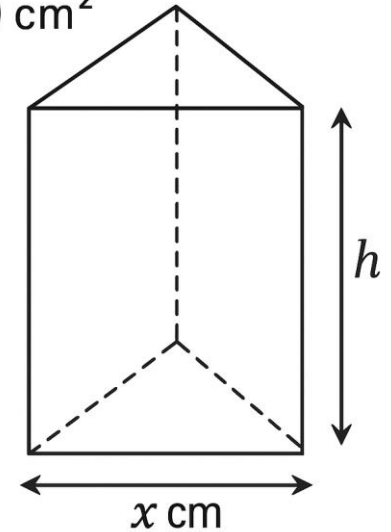
	0	$\sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$	$+\infty$
$20 - \sqrt{3}x^2$		+	-

$$20 - \sqrt{3}x^2 \xrightarrow{x=1} 20 - \sqrt{3} > 0$$

$$20 - \sqrt{3}x^2 \xrightarrow{x=10} 20 - 100\sqrt{3} < 0$$

Siendo el dominio de $V(x)$: $x \in \left(0, \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}\right)$

Área total = 10 cm^2
(dato)



4.1.2 Obtener los valores de x y h que maximizan el volumen.

$$V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$$

Se deriva la función, se iguala a cero y se hace un estudio de signos de $V(x)$ en su dominio de definición.

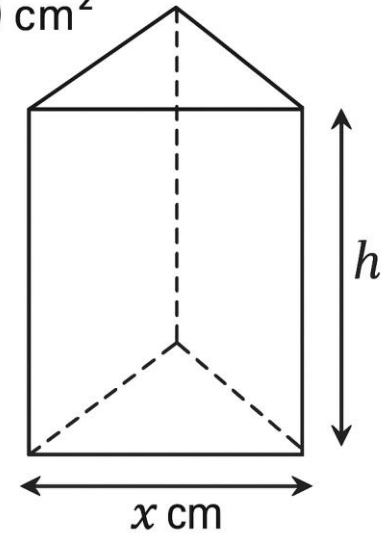
$$V'(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8}x^2 = 0 \rightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{6} \xrightarrow{x > 0} x = +\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \approx 1,9619 \text{ cm}$$

	0	$\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}}}$
$V'(x)$		+	-
$V(x)$			

$$V'(1) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8} > 0$$

$$V'(3) = \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{8} \cdot 3^2 < 0$$

Área total = 10 cm^2
(dato)



El valor de x que maximiza el volumen es: $x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \text{ cm} \approx \mathbf{1,9619 \text{ cm}}$

El valor de h que maximiza el volumen es:

$$h = \frac{10}{3x} - \frac{\sqrt{3} \cdot x}{6} = \frac{10}{3 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}}{6} \approx \mathbf{1,1327 \text{ cm}}$$

Ejercicio 4.1

4.1.3 Hallar dicho volumen.

Recordamos que: $V(x) = \frac{5\sqrt{3}}{6}x - \frac{1}{8}x^3$ $x = \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} \approx 1,9619 \text{ cm}$

Se calcula el volumen máximo: $V\left(\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}} - \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{5\sqrt{3}}\right)^3 \approx 1,8878 \text{ cm}^3$

El volumen máximo es, aproximadamente, **1,8878 cm³**