



PAU COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMATICAS II

Análisis de funciones

Junio 2025 - RESERVA

Problema 4.2



Ejercicio 4.2

4.2 Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$, se pide:

4.2.1 **(0.5 puntos)** Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f .

4.2.2 **(0.75 puntos)** Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

4.2.3 **(0.5 puntos)** Representar gráficamente la función $y = f(x)$.

4.2.4 **(0.75 puntos)** Calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$.

www.angelcuesta.com

a) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los valores de x que están fuera del dominio. En dichos valores, **es posible** que haya una asíntota vertical.

Calculo el límite de la función en $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0} + 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0^+} + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{0^+} + 1 = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(+\infty)^2} + \infty = 0 + \infty = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x = \frac{4}{(-\infty)^2} - \infty = 0 - \infty = -\infty$$

Por consiguiente $f(x)$ no tiene asíntota horizontal.

a) Calcular el dominio de definición y las asíntotas de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Puesto que la función no tiene asíntota horizontal, se debe comprobar si tiene asíntota oblicua.

Para ello, utilizaré la fórmula que me permite calcular su pendiente y ordenada en el origen. Si su pendiente es un número distinto de cero, eso me indicará que tiene asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{(x-1)^2} + x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x \cdot (x-1)^2} + \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x \cdot (x-1)^2} + 1 = \frac{4}{\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} + x - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

Por consiguiente $y = x$ es asíntota oblicua de $f(x)$.

NOTA: Observa que el valor de los límites es el mismo tanto cuando $x \rightarrow +\infty$ como $x \rightarrow -\infty$.

4.2.2 Indicar, si existen, los extremos, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} + 1 = \frac{-8}{(x-1)^3} + 1$$

Igualo la derivada a cero:
$$\frac{-8}{(x-1)^3} + 1 = 0 \rightarrow \frac{-8}{(x-1)^3} = -1 \rightarrow (x-1)^3 = 8 \rightarrow x-1 = 2 \rightarrow x = 3$$

Se estudia el signo de la derivada.
$$f'(0) = \frac{-8}{(0-1)^3} + 1 > 0 \quad f'(2) = \frac{-8}{(2-1)^3} + 1 < 0 \quad f'(4) = \frac{-8}{(4-1)^3} + 1 > 0$$

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

$f(x)$ **crece** en $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$f(x)$ **decrece** en $x \in (1, 3)$

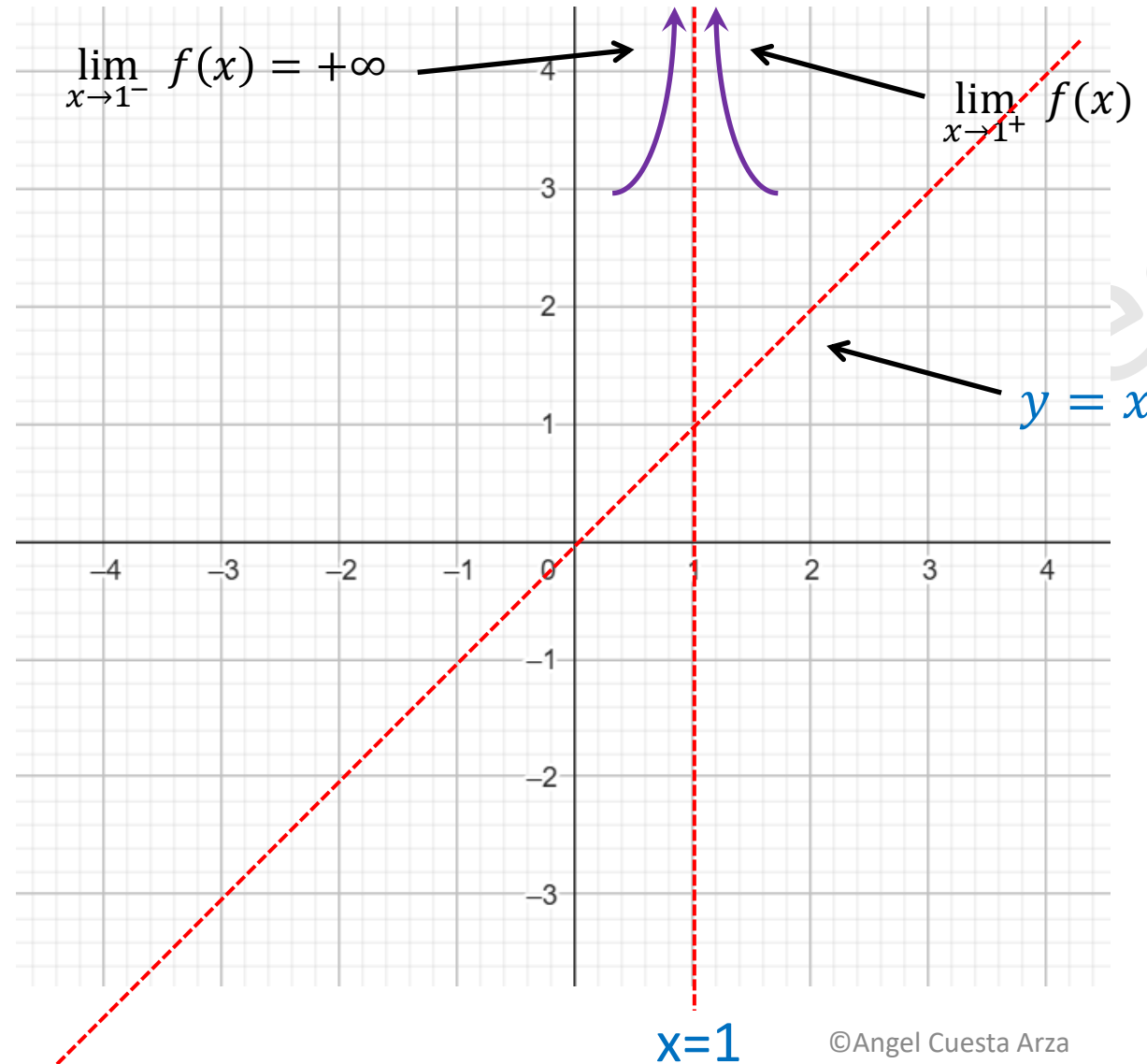
En $x = 3$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo.
$$f(3) = \frac{4}{(3-1)^2} + 3 = 1 + 3 = 4$$

$f(x)$ **tiene un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

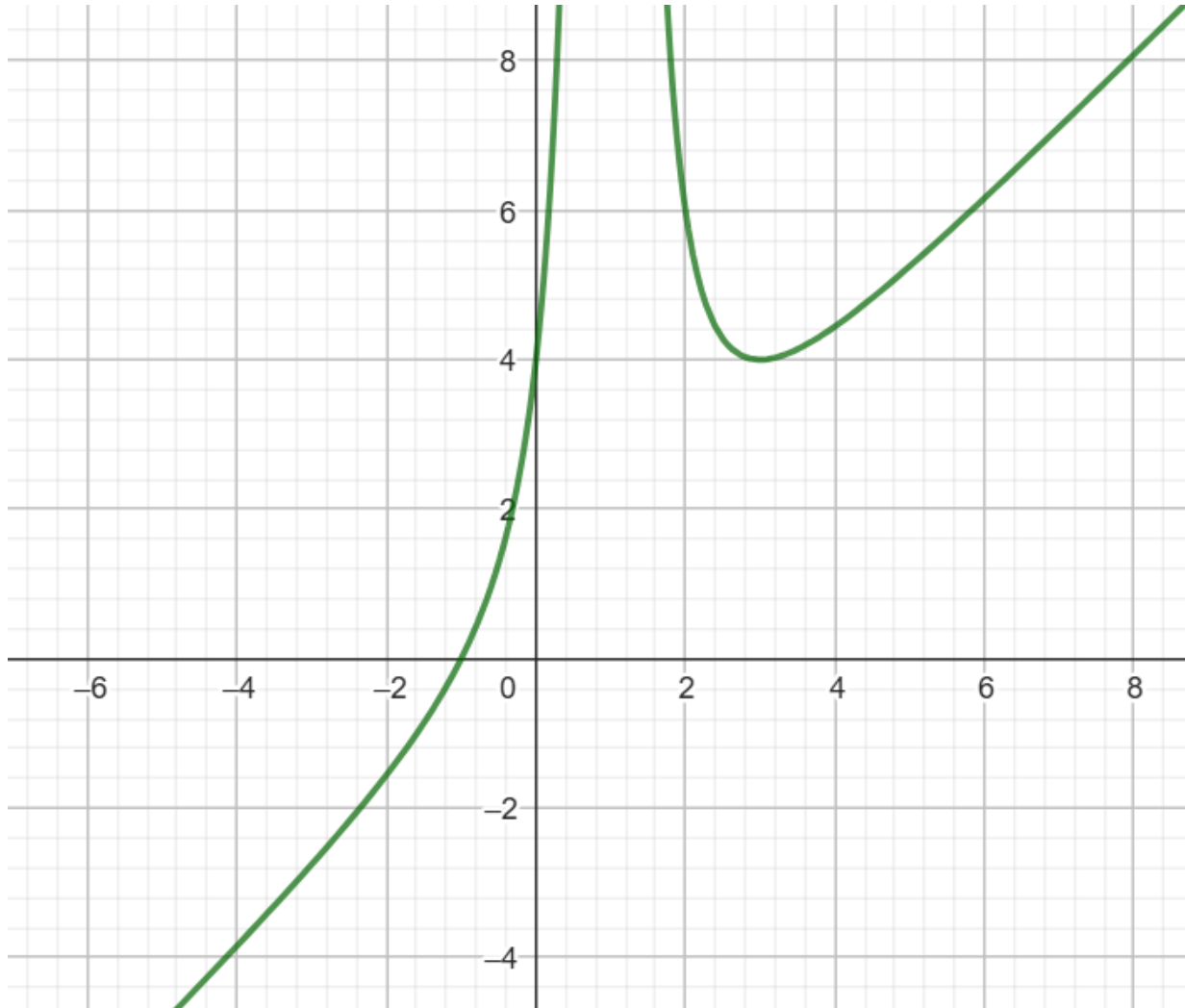
No presenta máximo relativo ya que $x = 1$ no pertenece al dominio de $f(x)$.

4.2.3 Representar gráficamente la función $y = f(x)$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

Se hace en primer lugar una representación de las asíntotas para saber, más o menos, por donde transcurrirá la gráfica de la función.



4.2.3 Representar gráficamente la función $y = f(x)$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$



Este sería el esbozo de la gráfica. Es fundamental que coloques el mínimo relativo en el punto exacto donde se encuentra ya que ha sido calculado.

El resto de la gráfica no es tan importante que pase por los puntos exactos.

Puedes calcular el punto de corte con el eje Y si lo necesitas.

4.2.4 Calcular la integral indefinida $\int f(x)dx$. $f(x) = \frac{4}{(x-1)^2} + x$

La integral es prácticamente inmediata. Basta con aplicar algunas propiedades de las integrales y de las potencias.

$$\int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \int \frac{4}{(x-1)^2} dx + \int x dx = 4 \cdot \int (x-1)^{-2} dx + \int x dx = 4 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} = \frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int \left(\frac{4}{(x-1)^2} + x \right) dx = \frac{-4}{x-1} + \frac{x^2}{2} + C$$