

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 1
Probabilidad

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: **tomates, pimientos y calabacines**. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: **control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos**. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El **50%** del área está dedicada a **tomates**, el **30%** a **pimientos** y el **20%** a **calabacines**.
- Para los **tomates**, la finca utiliza **control biológico** en el **40%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **pimientos**, la finca utiliza **control biológico** en el **30%**, **pesticidas químicos** en el **40%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **calabacines**, se utiliza **control biológico** en el **20%**, **pesticidas químicos** en el **50%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.

PREGUNTA 1

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los **tomates**:
 - El **control biológico** tiene un **85%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **95%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **80%** de efectividad.
- Para los **pimientos**:
 - El **control biológico** tiene un **80%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **90%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **75%** de efectividad.
- Para los **calabacines**:
 - El **control biológico** tiene un **70%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **85%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **65%** de efectividad.

PREGUNTA 1

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?
- 1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?
- 1.3 (1 punto) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Tal como se enuncia el problema, lo más conveniente es plantear el ejercicio mediante un **diagrama de árbol**. Además, se puede observar que los apartados 1.1 y 1.2, deben resolverse mediante el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, respectivamente.

PREGUNTA 1

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

T=cultivo dedicado a tomates.

CB=cultivo con control biológico.

E=El método es efectivo

Pi= cultivo dedicado a pimientos.

PQ= cultivo con pesticidas químicos.

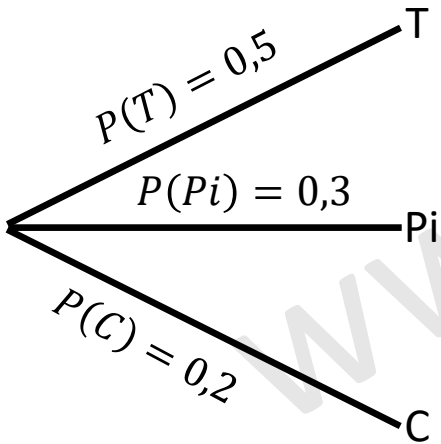
$\bar{E}$ =El método **NO** es efectivo

C= cultivo dedicado a calabacines.

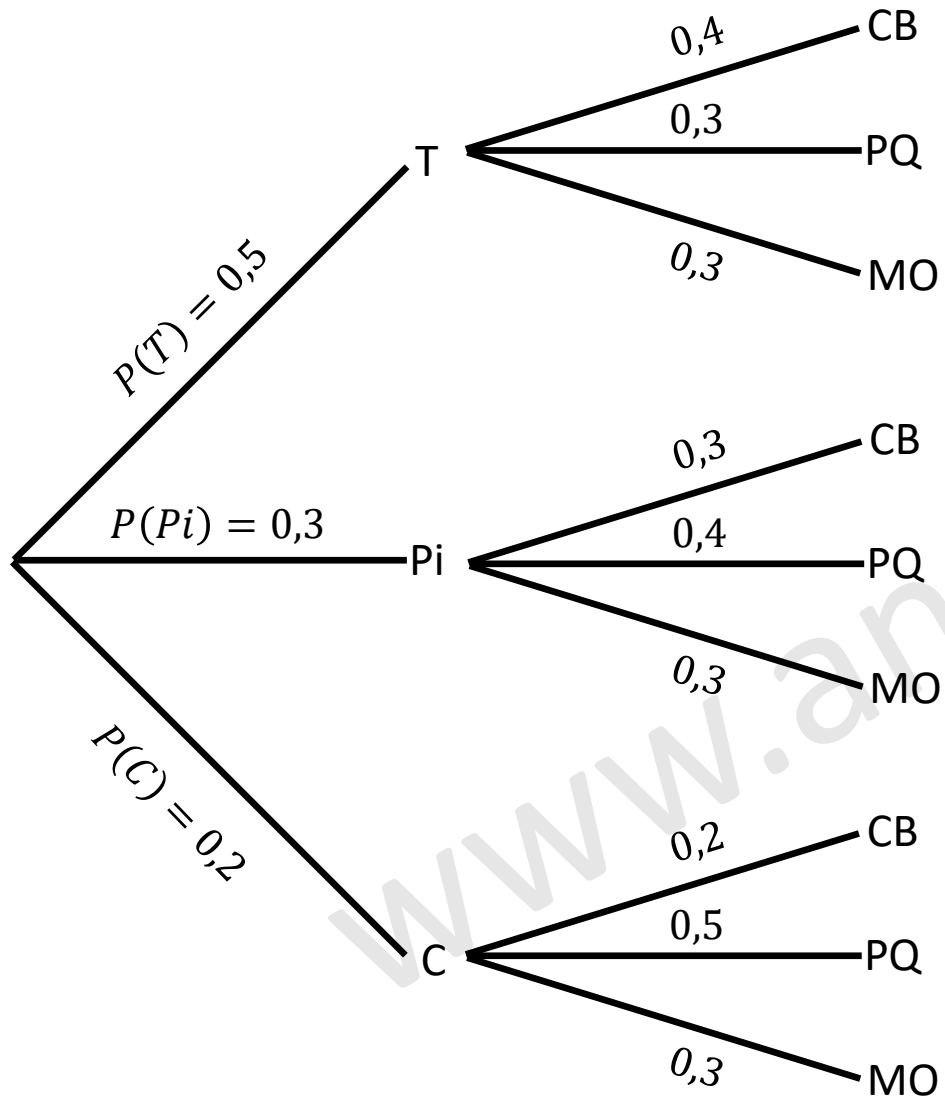
MO= cultivo con métodos orgánicos

Se construye el diagrama de árbol.

El **50%** del área está dedicada a **tomates**, el **30%** a **pimientos** y el **20%** a **calabacines**.



PREGUNTA 1

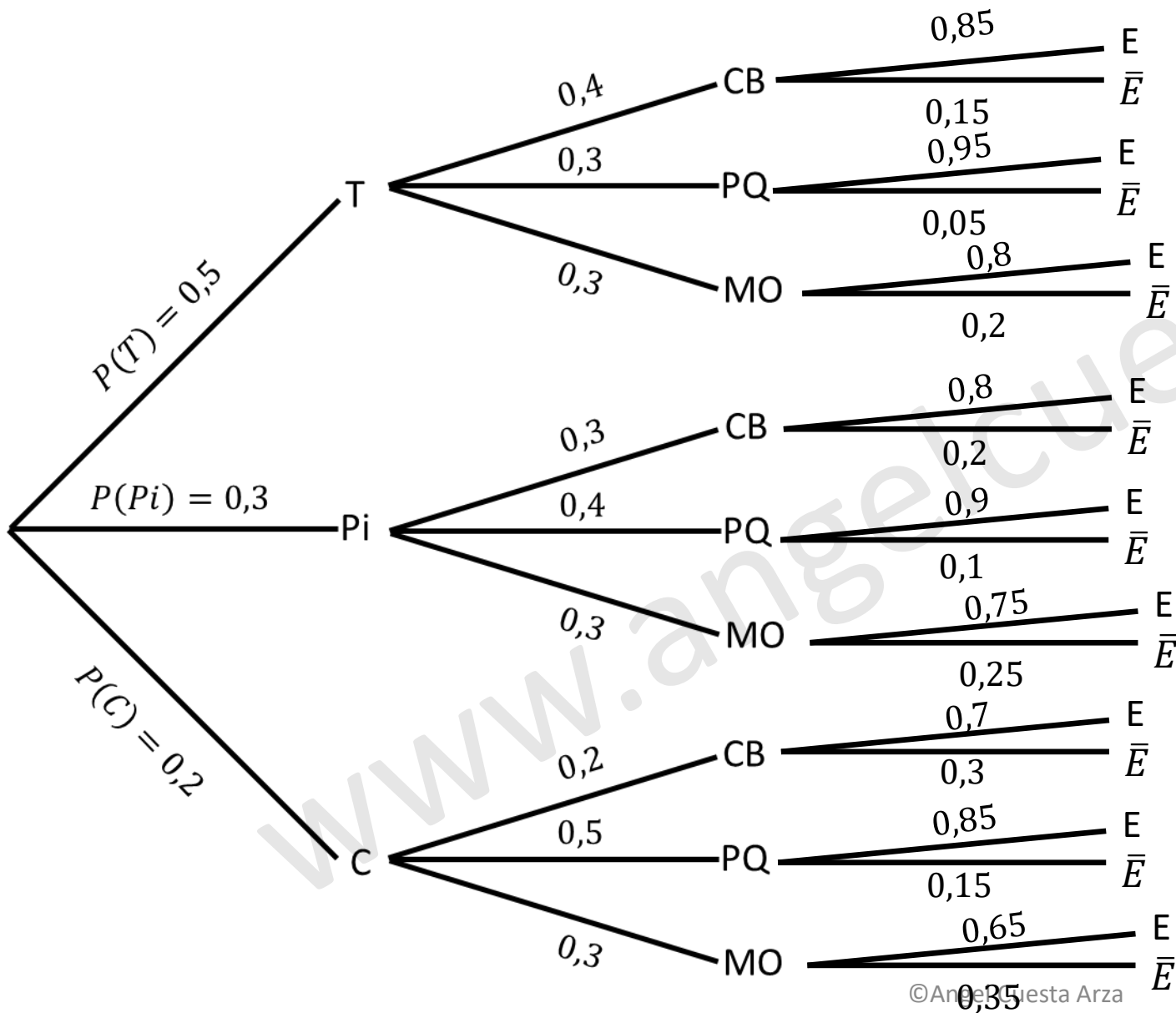


Para los tomates, la finca utiliza **control biológico** en el **40%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

Para los pimientos, la finca utiliza **control biológico** en el **30%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **40%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

Para los calabacines, la finca utiliza **control biológico** en el **30%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **40%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

PREGUNTA 1



Para los tomates, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 85%, pesticidas químicos un 95% y métodos orgánicos un 80%.**

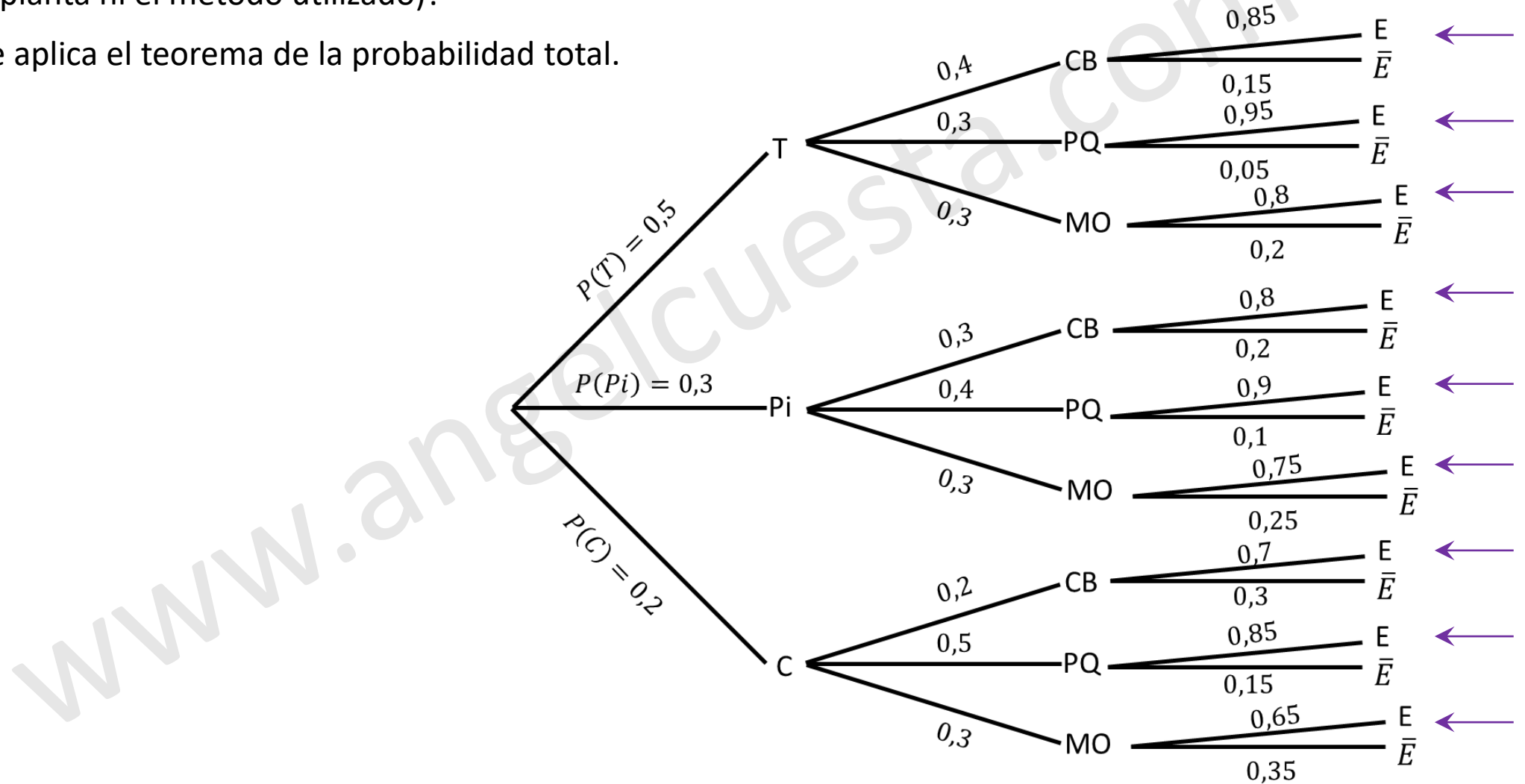
Para los pimientos, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 80%, pesticidas químicos un 90% y métodos orgánicos un 75%.**

Para los calabacines, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 70%, pesticidas químicos un 85% y métodos orgánicos un 65%.**

PREGUNTA 1

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

Solución: Se aplica el teorema de la probabilidad total.



PREGUNTA 1

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

Solución: Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(T \cap E) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,85 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,95 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,4325$$

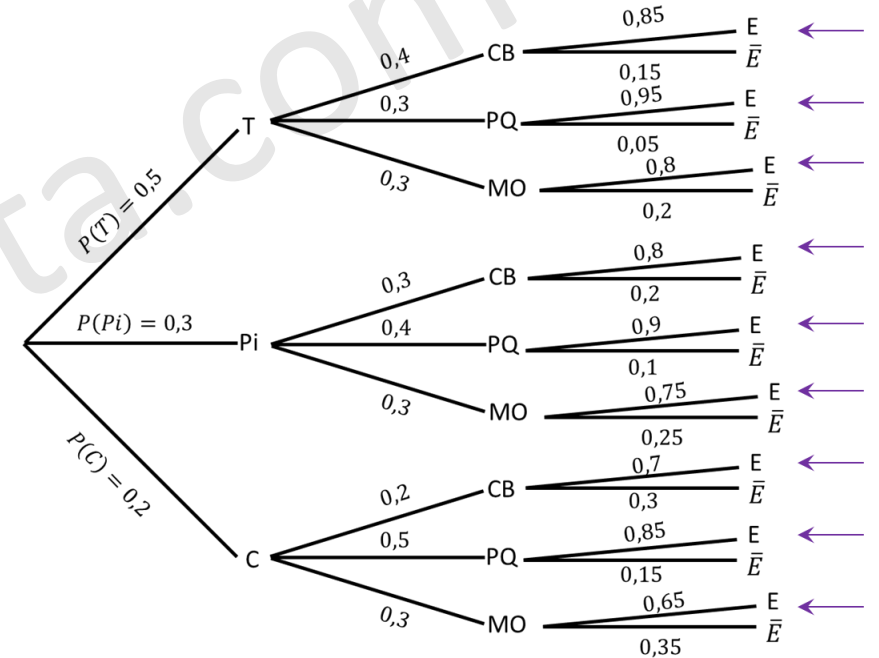
$$P(Pi \cap E) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,75 = 0,2475$$

$$P(C \cap E) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,85 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,65 = 0,152$$

$$P(E) = P(T \cap E) + P(Pi \cap E) + P(C \cap E)$$

$$P(E) = 0,4325 + 0,2475 + 0,152 = 0,832$$

La probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas es **0,832 (83,2%)**.



PREGUNTA 1

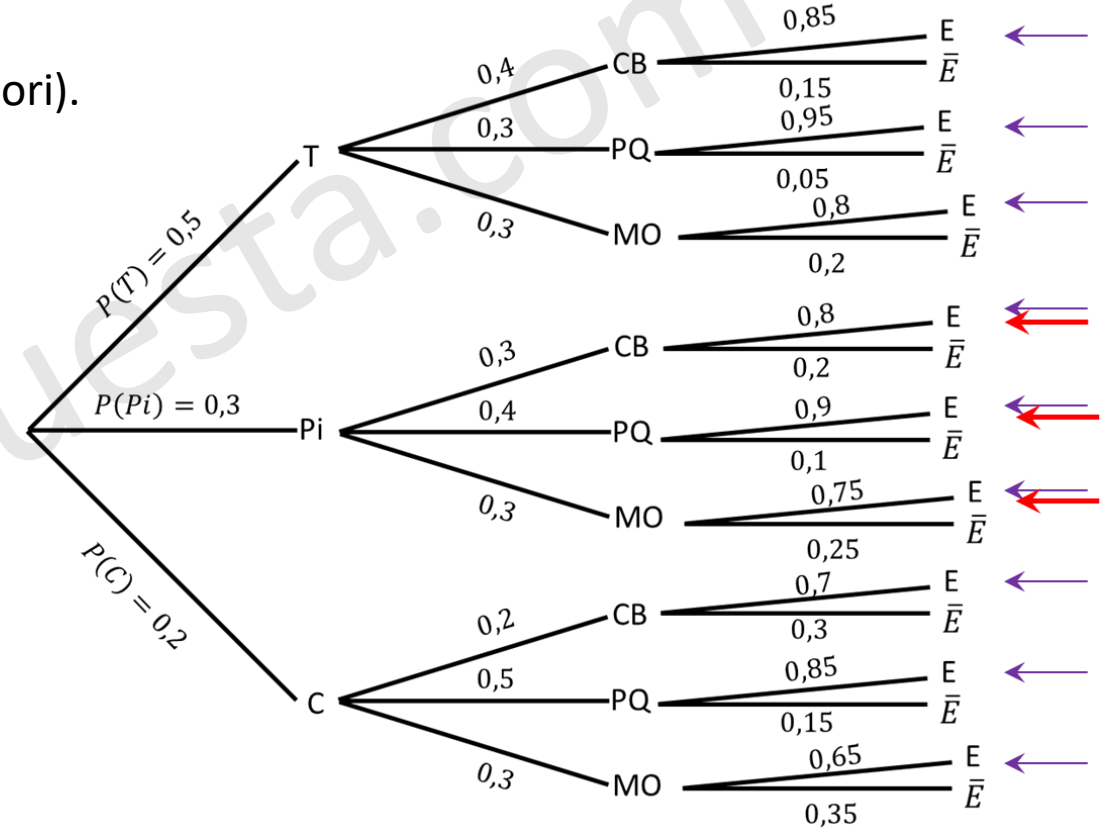
1.2 Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

Solución: Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad a posteriori).

$$P(Pi/E) = \frac{P(Pi \cap E)}{P(E)}$$

$$P(Pi/E) = \frac{0,2475}{0,832} \approx 0,2975$$

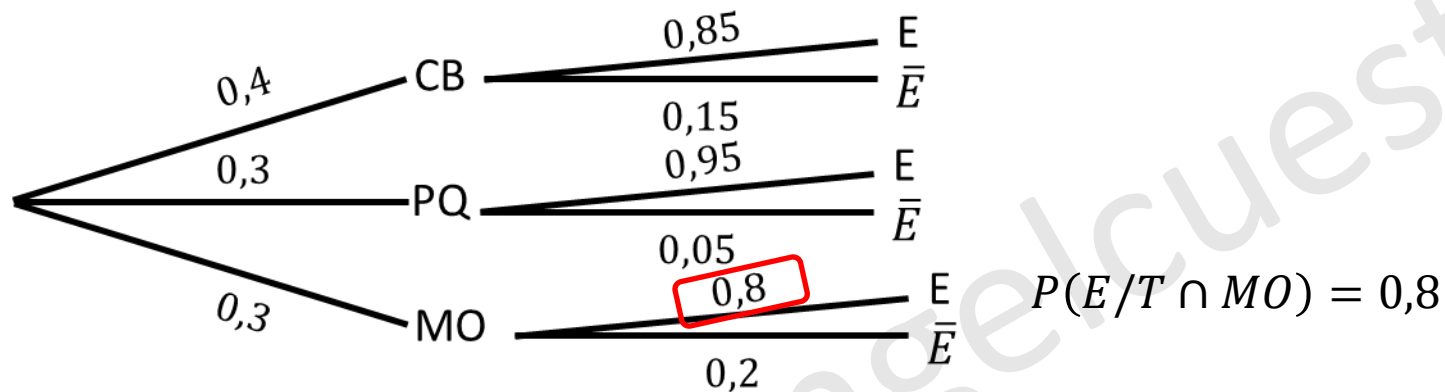
Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, la probabilidad de que esa planta sea un pimiento es **0,2975 (29,75%)** aproximadamente.



PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución: Se obtiene del diagrama de árbol la probabilidad de que un tomate tratado con métodos orgánicos haya tenido un tratamiento efectivo. Se recuerda la parte del árbol que nos hace falta.



Definimos la variable aleatoria X: **X**=número de tomates que han evitado los efectos de la plaga.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,8; q = 0,2$ $X \sim \mathbf{Bi(11; 0,8)}$

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución: X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,8; q = 0,2$ $X \sim Bi(11; 0,8)$

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$

Al tratar de utilizar la tabla, nos encontraremos con el problema de que la probabilidad de éxito igual a **0,8** no está en la tabla que nos proporcionan en el examen. **Sólo hay valores comprendidos entre 0 y 0,5.**

Por ello, debemos hacer un cambio de variable y definir una nueva variable binomial asociada al suceso contrario, es decir, el tomate NO ha evitado los efectos de la plaga.

Y=número tomates que NO ha evitado la plaga.

Y es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,2; q = 0,8$ $Y \sim Bi(11; 0,2)$

Ahora debemos reescribir la pregunta en función de Y. $X + Y = 11 \longrightarrow X = 11 - Y$

$$P(X \geq 3) \xrightarrow{X = 11 - Y} P(11 - Y \geq 3) \longrightarrow P(-Y \geq -8) \longrightarrow P(Y \leq 8)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$P(Y \leq 8) = 1,0000$$

La probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga es **1,0000**.

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Comentario: Este apartado puede hacerse sin hacer uso de la tabla y así te ahorrarías el cambio de variable. Yo lo he hecho para enseñaros a utilizar la tabla y como hacer cambios de variable en este tipo de ejercicios. Se podría hacer por medio de la fórmula de la binomial aplicada 3 veces.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{11}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{11} = 2,048 \cdot 10^{-8}$$

$$P(X = 1) = \binom{11}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{10} = 9,0112 \cdot 10^{-7}$$

$$P(X = 2) = \binom{11}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^9 = 1,80224 \cdot 10^{-5}$$

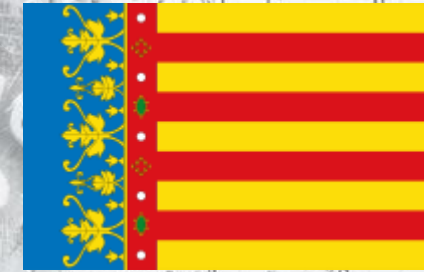
$$P(X \geq 3) = 1 - 2,048 \cdot 10^{-8} - 9,0112 \cdot 10^{-7} - 1,80224 \cdot 10^{-5} = \mathbf{0,99998 \approx 1,0000}$$

Comentario: Esperemos que el día del examen los números sean más agradables de trabajar.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
MODELO 2025



Pregunta 2.1

Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



Ejercicio 2.1

Sea el sistema de ecuaciones donde a es un parámetro real. Se pide:

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución: Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $1 - a^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -1$ o $a = 1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Ejercicio 2.1

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	-1	2	-1	3
F_1	1	-1	1	-2
$F_2=F_2+F_1$	0	1	0	1

F_3	0	2	0	0
$-2F_2$	0	-2	0	-2
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	-2

F_3	1	1	1	2
$-F_1$	-1	1	-1	-2
$F_3=F_3+F_1$	0	2	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = 1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Ejercicio 2.1

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\text{Si } a = -1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	-1	2	1	3
F_1	1	-1	-1	-2
$F_2=F_2+F_1$	0	1	0	1

F_3	-1	1	1	2
F_1	1	-1	-1	-2
$F_3=F_3+F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las dos filas linealmente independientes. Para $a = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = 1$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = -1$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -1$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = -2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + y + z \\ z = \lambda; y = 1 \end{cases} \rightarrow x = -2 + 1 + \lambda \rightarrow x = -1 + \lambda$$

La solución del sistema si $a = -1$ es:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in R$$

Ejercicio 2.1

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $a = -1$ o $a = 1$. Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 1 - a^2$; $1 - a^2 \rightarrow -(a - 1) \cdot (a + 1)$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{-a - 1}{1 - a^2} = \frac{-(a + 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 1)} = \boxed{\frac{1}{a - 1}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a^2}{1 - a^2} = \boxed{1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a + 1}{1 - a^2} = \frac{(a + 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 1)} = \boxed{\frac{-1}{a - 1}}$$

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 2.2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2024 Problema 1
Comunidad Valenciana



PAU Julio 2024 Problema 2
Comunidad Valenciana

Ejercicio 2.2

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

2.2.2 Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - 0 - 0 + 2 = 5 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Se calculan en primer lugar las matrices A^3 y A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Se calcula la matriz B a partir de las matrices obtenidas anteriormente. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$$

Las matrices pedidas son: $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$

Ejercicio 2.2

2.2.2 Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Por las propiedades de las matrices, sabemos que: $A^{-1} \cdot A = U$

Por ello debemos tratar de llegar a una expresión análoga a la de arriba con los datos dados.

Desarrollamos la expresión inicial para dejar sola la U a la derecha. Se multiplica por A en ambos lados de la igualdad.

$$A \cdot (\alpha A^2 + \beta A + U) = A \cdot A^{-1} \longrightarrow \alpha A^3 + \beta A^2 + A = U$$

Recordamos del apartado anterior que: $B = A^3 - 3A^2 + 5A = 5U \longrightarrow \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 + A = U$

Comparando las expresiones:

$$\begin{array}{l} \alpha A^3 + \beta A^2 + A = U \\ \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 + A = U \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Los valores pedidos son: $\alpha = \frac{1}{5}$ $\beta = -\frac{3}{5}$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 3.1
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.1

3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas $r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$ y $s: (x - 2)/(-1) = y/3 = z + 2$, obtener:

3.1.1 **(1.25 puntos)** La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.

3.1.2 **(1.25 puntos)** La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π .

Se calcula un punto y un vector director de las rectas r y s :

$$r: \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y = z = \lambda \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (-1, 0, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$$s: \frac{x - 2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{1} \longrightarrow s: \begin{cases} Q = (2, 0, -2) \\ \vec{w} = (-1, 3, 1) \end{cases}$$

Ejercicio 3.1

3.1.1 La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.

$$r: \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (-1, 0, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases} \quad s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \longrightarrow r: \begin{cases} Q = (2, 0, -2) \\ \vec{w} = (-1, 3, 1) \end{cases}$$

Es necesario saber si las rectas son paralelas o no. Si las rectas son paralelas el procedimiento para calcular la ecuación del plano es diferente del procedimiento que debemos seguir si son secantes o se cruzan.

Es fácil comprobar que los vectores $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 1)$ no son paralelos. $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$

Como las rectas se cortan o se cruzan, los vectores directores de las rectas serán los vectores directores del plano. Se calcula la ecuación del plano que pasa por $O = (0, 0, 0)$ y cuyos vectores directores son $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (-1, 3, 1)$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \pi: -2x - y + z = 0$$

La ecuación del plano es: $\pi: -2x - y + z = 0$

Ejercicio 3.1

3.1.2 La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π .

$$r: \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (-1, 0, 0) \\ \vec{v} = (0, 1, 1) \end{cases} \quad s: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \longrightarrow r: \begin{cases} Q = (2, 0, -2) \\ \vec{w} = (-1, 3, 1) \end{cases} \quad \pi: -2x - y + z = 0$$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente. Es conveniente hacer notar que cuando me piden la distancia de un punto de la recta paralela al plano, me están pidiendo la distancia entre la recta y el plano

$$d_{r-\pi} = \frac{|-2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad d_{s-\pi} = \frac{|-2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

La distancia de un punto $P \in r$ a π es: $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **unidades**

La distancia de un punto $Q \in s$ a π es: $\sqrt{6}$ **unidades**

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 3.2
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π , de ecuaciones $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi = ax + y - z = b$, con a y b parámetros reales, obtener:

3.2.1 **(1 punto)** Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

3.2.2 **(1.5 puntos)** Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Se calcula un punto y un vector director de la recta r : $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (5,1,0) \\ \vec{w} = (1,3,4) \end{cases}$

Se calcula el vector normal del plano π : $\vec{n} = (a, 1, -1)$

Una recta y un plano son secantes si el vector director de la recta NO es perpendicular al vector normal del plano.

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = (a, 1, -1) \cdot (1, 3, 4) = a + 3 - 4 = 0 \longrightarrow a = 1$$

La recta y el plano son secantes si $a \neq 1$.

Ejercicio 3.2

3.2.1 Los valores del parámetro a para los que a y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

Se expresa en forma paramétrica la ecuación de la recta r para luego sustituirla en la ecuación del plano.

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

$$ax + y - z = b \xrightarrow{(5 + \lambda, 1 + 3\lambda, 4\lambda)} a \cdot (5 + \lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b \longrightarrow 5a + a\lambda + 1 - \lambda = b$$

$$a\lambda - \lambda = b - 5a - 1 \longrightarrow (a - 1) \cdot \lambda = b - 5a - 1 \longrightarrow \lambda = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$$

Se obtienen las coordenadas del punto de intersección sustituyendo el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta.

Ejercicio 3.2

3.2.1 Los valores del parámetro a para los que a y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

$$\lambda = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$$

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow x = 5 + \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{5a - 5 + b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{b - 6}{a - 1} \\ \longrightarrow y = 1 + 3 \cdot \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{a - 1 + 3b - 15a - 3}{a - 1} = \frac{-14a + 3b - 4}{a - 1} \\ \searrow z = 4 \cdot \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{-20a + 4b - 4}{a - 1} \end{array}$$

Las coordenadas del punto de intersección entre la recta y el plano si $a \neq 1$ son:

$$P = \left(\frac{b - 6}{a - 1}, \frac{-14a + 3b - 4}{a - 1}, \frac{-20a + 4b - 4}{a - 1} \right)$$

Ejercicio 3.2

3.2.2 Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Tal como se demostró en el apartado anterior, para el valor $a = 1$, la recta está contenida en el plano o es paralela al plano. Para analizar para que valores de b está contenida y para que valores de b es paralela, se tomará un punto de la recta y se comprobará si pertenece al plano o no.

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (5,1,0) \\ \vec{w} = (1,3,4) \end{cases}$$

$$ax + y - z = b \xrightarrow[a=1]{(5,1,0)} 1 \cdot 5 + 1 - 0 = b \longrightarrow b = 6$$

Si $b = 6$, el punto P pertenece al plano. Por consiguiente, **la recta está contenida en el plano para $b = 6$.**

Si $b \neq 6$, el punto P **NO** pertenece al plano. Por consiguiente, **la recta es paralela al plano para $b \neq 6$.**

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 4.1 Análisis de funciones

Ejercicio 4.1

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

4.1.1 **(1.25 puntos)** El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

4.1.2 **(1.25 puntos)** El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

La función $g(x)$ pasa por el punto $(-1, 0)$, por lo que: $g(-1) = (-1)^2 - b = 0 \longrightarrow b = 1$

El valor pedido es **$b = 1$** .

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

La función $f(x) = -x^2 + x + 2$ es una función cuadrática con el coeficiente numérico del término cuadrático negativo. Por ello, su gráfica será una parábola invertida.

Calculo el vértice derivando la función e igualando a cero. También podría utilizar la fórmula $v_x = \frac{-b}{2a}$

$$f'(x) = -2x + 1 \longrightarrow -2x + 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Aunque ya sé que el valor de $x = 1/2$ obtenido es la coordenada x del máximo relativo, lo demuestro utilizando el criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = -2 \longrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$$

Se calcula la coordenada y del vértice: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$

Las coordenadas del vértice son: $V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

A continuación, debemos calcular los puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con el eje X ($y = 0$): Se iguala la función a 0. $-x^2 + x + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X , serán $A = (-1, 0)$ y $B = (2, 0)$

El punto de corte con el eje Y ($x = 0$): Se sustituye la x por cero en la función.

$$f(0) = -(0)^2 + 0 + 2 = 2$$

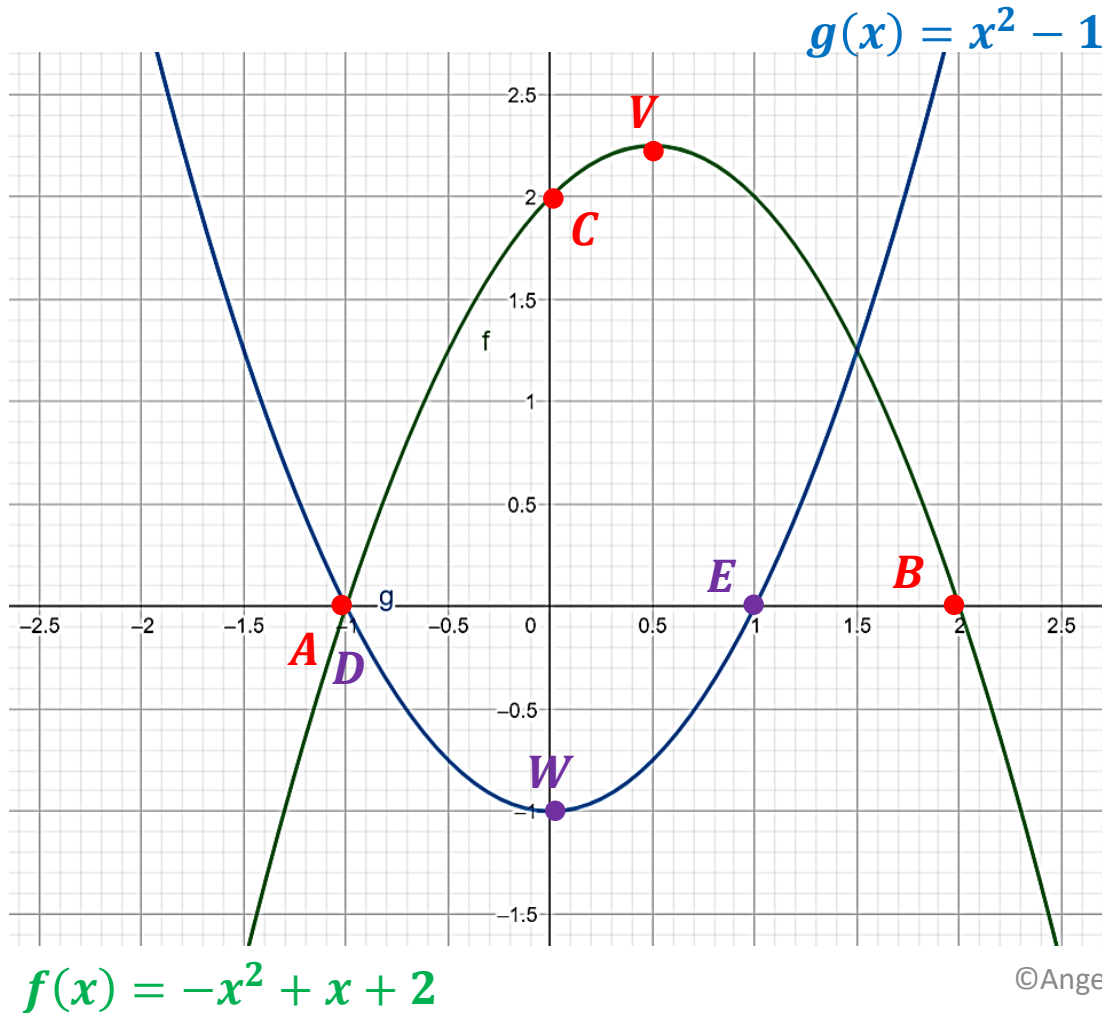
El punto de corte con el eje Y , será $C = (0, 2)$

Representaré ambas funciones sobre la misma gráfica. Por eso continuo con $g(x) = x^2 - 1$

Esta función es la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad en el sentido negativo del eje Y .

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.



$$V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad A = (-1, 0) \text{ y } B = (2, 0) \quad C = (0, 2)$$

$$W(0, -1) \quad D = (-1, 0) \text{ y } E = (1, 0)$$

Ejercicio 4.1

4.1.2 El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$

Utilizamos la gráfica del apartado anterior. Se deben calcular los valores de x en los que se cortan las gráficas de las funciones. Para ello se igualan sus expresiones en función de x .

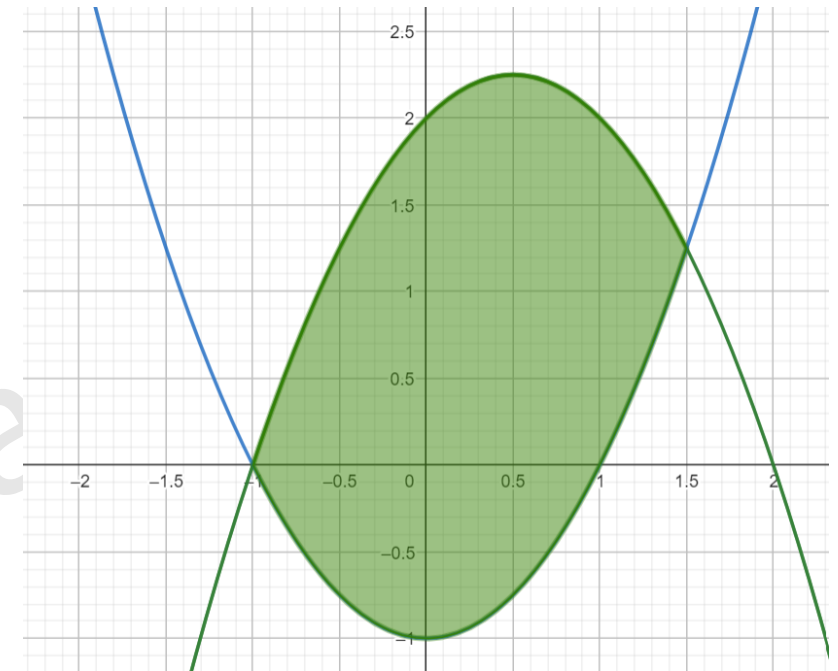
$$-x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \longrightarrow -2x^2 + x + 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3/2 \end{cases}$$

Se calcula el área mediante la integral definida correspondiente.

$$A = \int_{-1}^{3/2} (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-1}^{3/2} ((-x^2 + x + 2) - (x^2 - 1)) \, dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3) \, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{3/2}$$

$$A = \left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3 \cdot (-1) \right) = \frac{27}{8} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \frac{125}{24}$$

El área de la superficie finita encerrada entre las curvas es: $\frac{125}{24}$ *unidades de área*



PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 4.2
Optimización de funciones

Ejercicio 4.2

4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo.

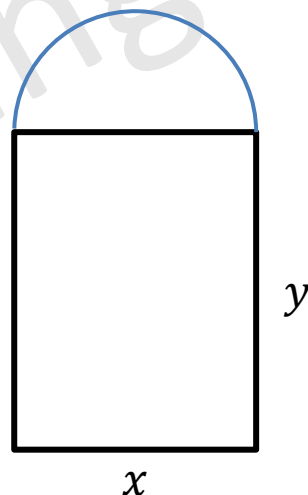
La base del rectángulo mide x y su altura mide y , por lo que el diámetro del semicírculo mide x .

Obtener:

4.2.1 **(1 punto)** La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .

4.2.2 **(1.5 puntos)** El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Se hace un esquema de la ventana.



Ejercicio 4.2

4.2.1 La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .

Puesto que conocemos el valor del perímetro, podemos definir una ecuación a partir de dicho dato en función de x e y .

$$x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 5$$

Por otro lado, el valor de la superficie en función de x e y es:

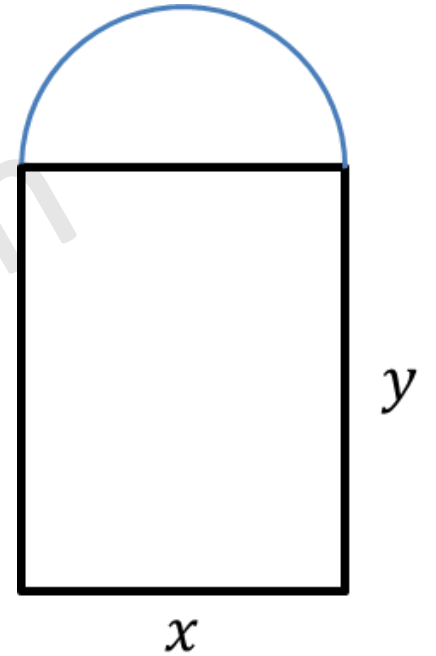
$$S(x, y) = x \cdot y + \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{x^2}{4}$$

Se despeja y de la ecuación obtenida a partir del perímetro y se sustituye en la función de la superficie.

$$x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 5 \longrightarrow 2x + 4y + \pi \cdot x = 10 \longrightarrow y = \frac{10 - (\pi + 2) \cdot x}{4}$$

$$S(x, y) = x \cdot y + \pi \cdot \frac{x^2}{8} \longrightarrow S(x) = x \cdot \left(\frac{10 - (\pi + 2) \cdot x}{4} \right) + \pi \cdot \frac{x^2}{8} = \frac{10}{4} \cdot x - \frac{(\pi + 2) \cdot x^2}{4} + \pi \cdot \frac{x^2}{8}$$

$$S(x) = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{\pi \cdot x^2 - 2 \cdot (\pi + 2) \cdot x^2}{8} = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{(-\pi - 4)}{8} \cdot x^2$$



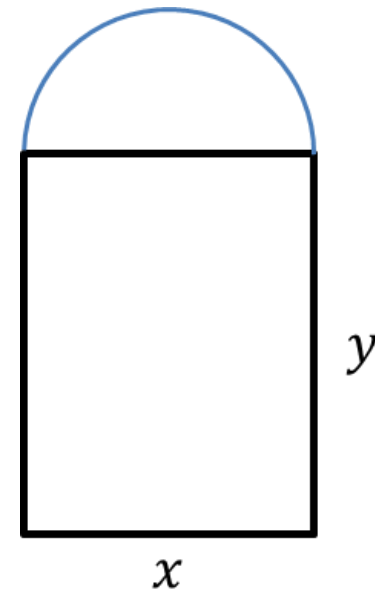
Ejercicio 4.2

4.2.1 La expresión $S(x)$ que da el área de una ventana Norman de perímetro 5 metros en función de su anchura x .

Conocida la expresión, es conveniente calcular su dominio de definición.

Del enunciado se deduce que: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Puesto que: $y = \frac{10 - (\pi + 2) \cdot x}{4} > 0 \longrightarrow 10 - (\pi + 2) \cdot x > 0 \longrightarrow 10 > (\pi + 2) \cdot x \longrightarrow x < \frac{10}{(\pi + 2)}$



$$S(x) = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{(-\pi - 4)}{8} \cdot x^2; \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathfrak{N}\} / 0 < x < \frac{10}{(\pi + 2)}$$

Ejercicio 4.2

4.2.2 El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

Recordamos que: $S(x) = \frac{5}{2} \cdot x + \frac{(-\pi - 4)}{8} \cdot x^2$; $Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R}\} / 0 < x < \frac{10}{(\pi + 2)}$

Bastaría con calcular el vértice de la función utilizando la fórmula habitual de 4º de ESO. Sabemos que el vértice de esta función representa el máximo relativo, ya que la función cuadrática tiene un coeficiente negativo en su término cuadrático. Pero como este ejercicio está propuesto en las PAU, lo resolveré utilizando derivadas. Por eso, calculo la derivada de la función $S(x)$.

$$S'(x) = \frac{(-\pi - 4)}{4} \cdot x + \frac{5}{2}$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local.

$$\frac{(-\pi - 4)}{4} \cdot x + \frac{5}{2} = 0 \longrightarrow \frac{(-\pi - 4)}{4} \cdot x = -\frac{5}{2} \longrightarrow x = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{(-\pi - 4)}{4}} = \frac{10}{\pi + 4} \approx 1,4 \in Dom f(x)$$

Aunque ya sabemos que es un máximo, vamos a comprobarlo utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

Ejercicio 4.2

4.2.2 El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.

$$S'(x) = \frac{(-\pi - 4)}{4} \cdot x + \frac{5}{2}$$

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente.

$$S''(x) = \frac{-\pi - 4}{4}$$

$$S''\left(\frac{10}{\pi + 4}\right) = \frac{-\pi - 4}{4} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en el valor de x obtenido hay un máximo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

Se calcula el área máxima sustituyendo el valor de x en la función $S(x)$.

$$S\left(\frac{10}{\pi + 4}\right) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{\pi + 4}\right) + \frac{(-\pi - 4)}{8} \cdot \left(\frac{10}{\pi + 4}\right)^2 \approx \mathbf{1,75 \text{ m}^2}$$

No se calcula y porque no lo piden. La solución es:

$$x = \frac{10}{\pi + 4} \quad S(x) \approx \mathbf{1,75 \text{ m}^2}$$