

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 1
Probabilidad

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: **tomates, pimientos y calabacines**. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: **control biológico, pesticidas químicos y métodos orgánicos**. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El **50%** del área está dedicada a **tomates**, el **30%** a **pimientos** y el **20%** a **calabacines**.
- Para los **tomates**, la finca utiliza **control biológico** en el **40%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **pimientos**, la finca utiliza **control biológico** en el **30%**, **pesticidas químicos** en el **40%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.
- Para los **calabacines**, se utiliza **control biológico** en el **20%**, **pesticidas químicos** en el **50%** y **métodos orgánicos** en el **30%**.

PREGUNTA 1

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los **tomates**:
 - El **control biológico** tiene un **85%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **95%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **80%** de efectividad.
- Para los **pimientos**:
 - El **control biológico** tiene un **80%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **90%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **75%** de efectividad.
- Para los **calabacines**:
 - El **control biológico** tiene un **70%** de efectividad.
 - Los **pesticidas químicos** tienen un **85%** de efectividad.
 - Los **métodos orgánicos** tienen un **65%** de efectividad.

PREGUNTA 1

Responda a todos los apartados

- 1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?
- 1.2 (0.75 puntos) Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?
- 1.3 (1 punto) Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Tal como se enuncia el problema, lo más conveniente es plantear el ejercicio mediante un **diagrama de árbol**. Además, se puede observar que los apartados 1.1 y 1.2, deben resolverse mediante el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes, respectivamente.

PREGUNTA 1

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

T=cultivo dedicado a tomates.

CB=cultivo con control biológico.

E=El método es efectivo

Pi= cultivo dedicado a pimientos.

PQ= cultivo con pesticidas químicos.

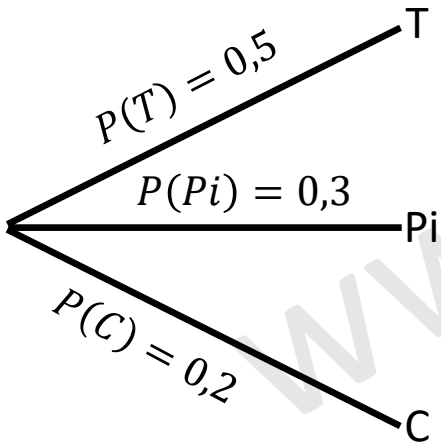
$\bar{E}$ =El método **NO** es efectivo

C= cultivo dedicado a calabacines.

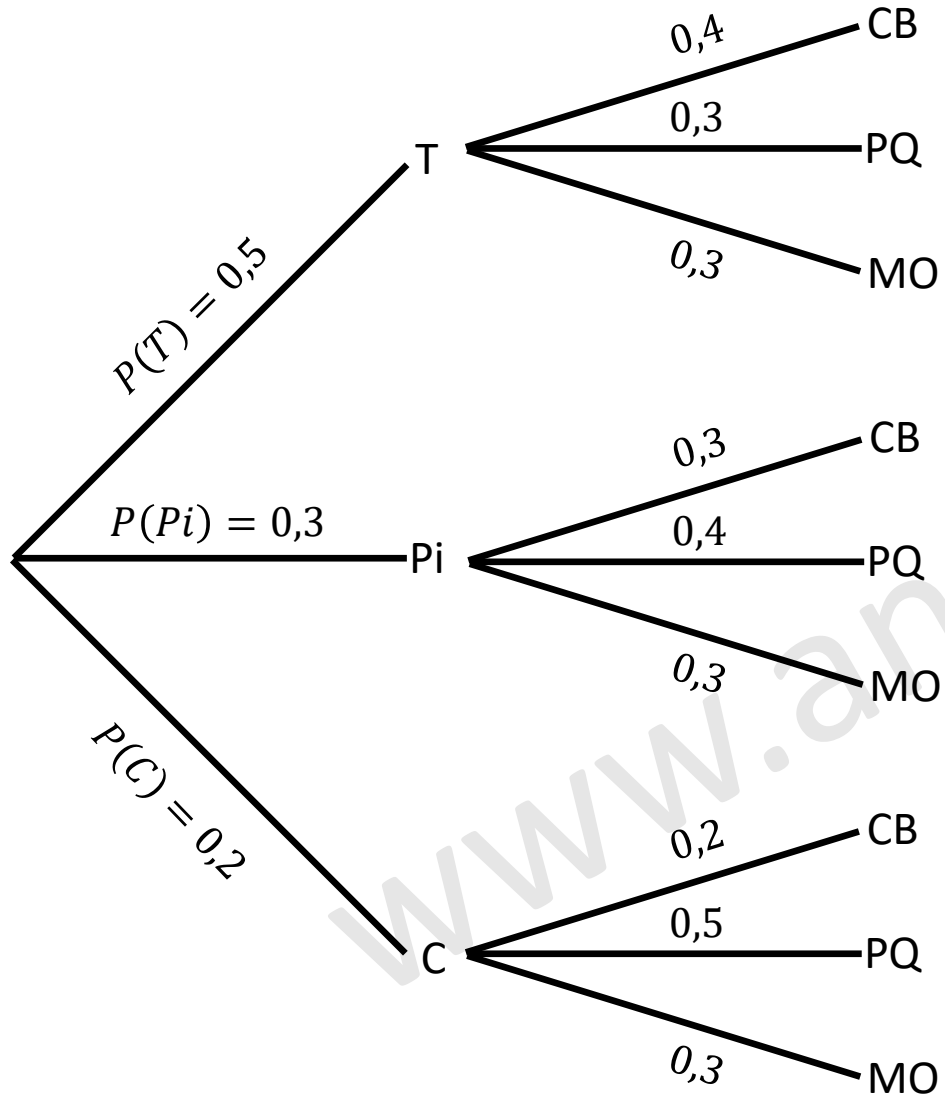
MO= cultivo con métodos orgánicos

Se construye el diagrama de árbol.

El **50%** del área está dedicada a **tomates**, el **30%** a **pimientos** y el **20%** a **calabacines**.



PREGUNTA 1

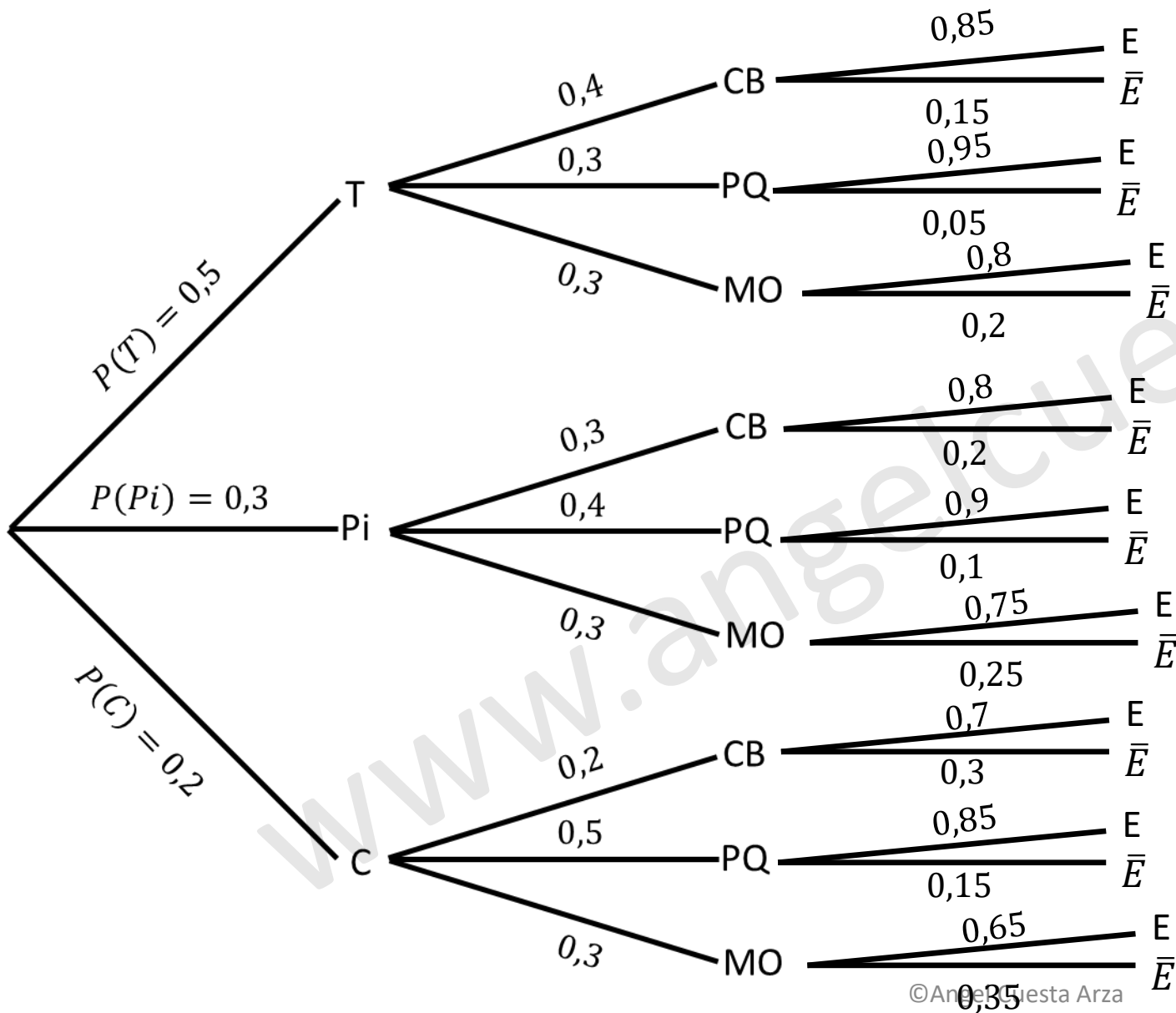


Para los tomates, la finca utiliza **control biológico** en el **40%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **30%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

Para los pimientos, la finca utiliza **control biológico** en el **30%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **40%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

Para los calabacines, la finca utiliza **control biológico** en el **30%** de la finca, **pesticidas químicos** en el **40%** de la finca y **métodos orgánicos** en el **30%**.

PREGUNTA 1



Para los tomates, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 85%, pesticidas químicos un 95% y métodos orgánicos un 80%.**

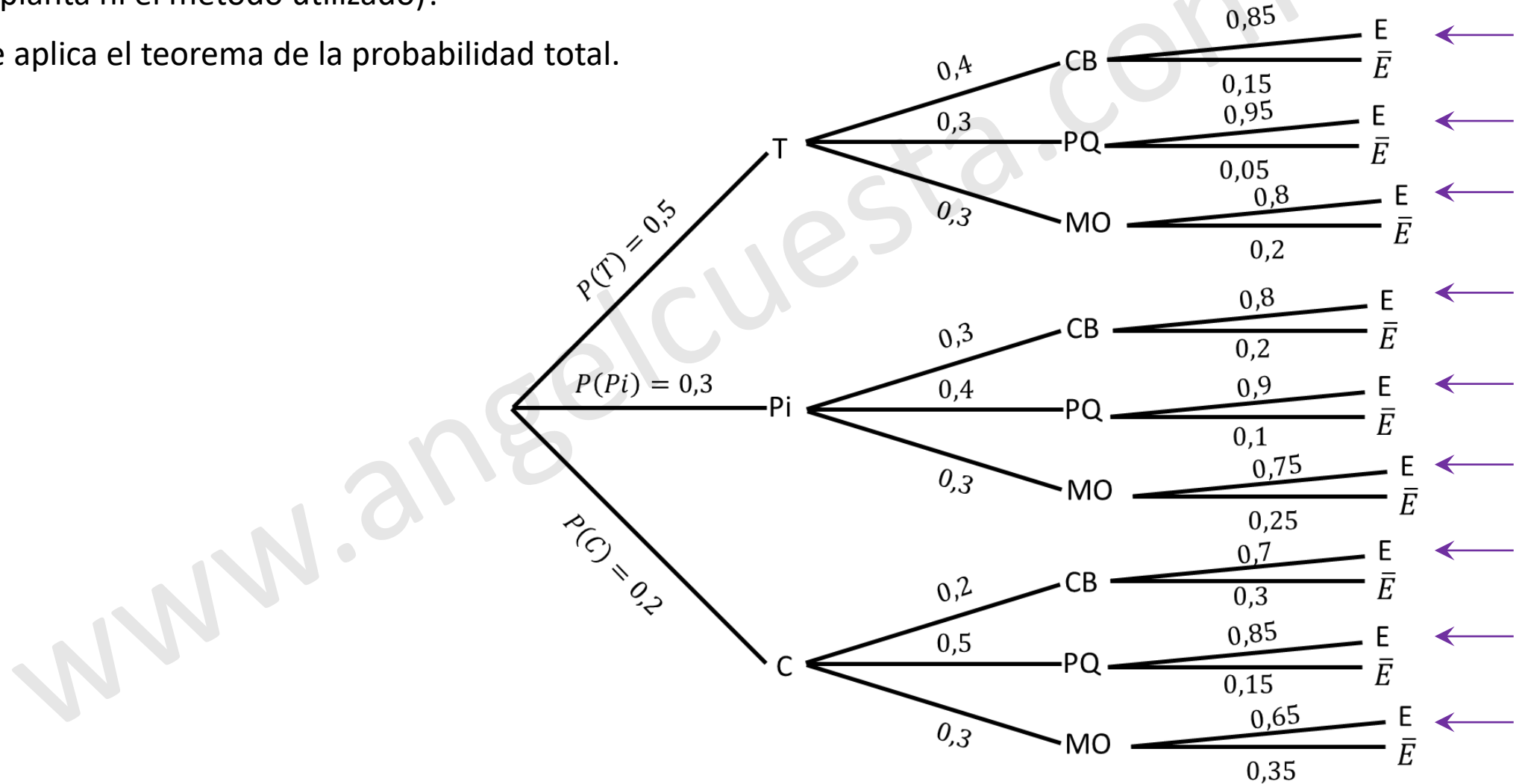
Para los pimientos, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 80%, pesticidas químicos un 90% y métodos orgánicos un 75%.**

Para los calabacines, la efectividad para el control de plagas es: **control biológico 70%, pesticidas químicos un 85% y métodos orgánicos un 65%.**

PREGUNTA 1

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

Solución: Se aplica el teorema de la probabilidad total.



PREGUNTA 1

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?

Solución: Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(T \cap E) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot 0,85 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,95 + 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,4325$$

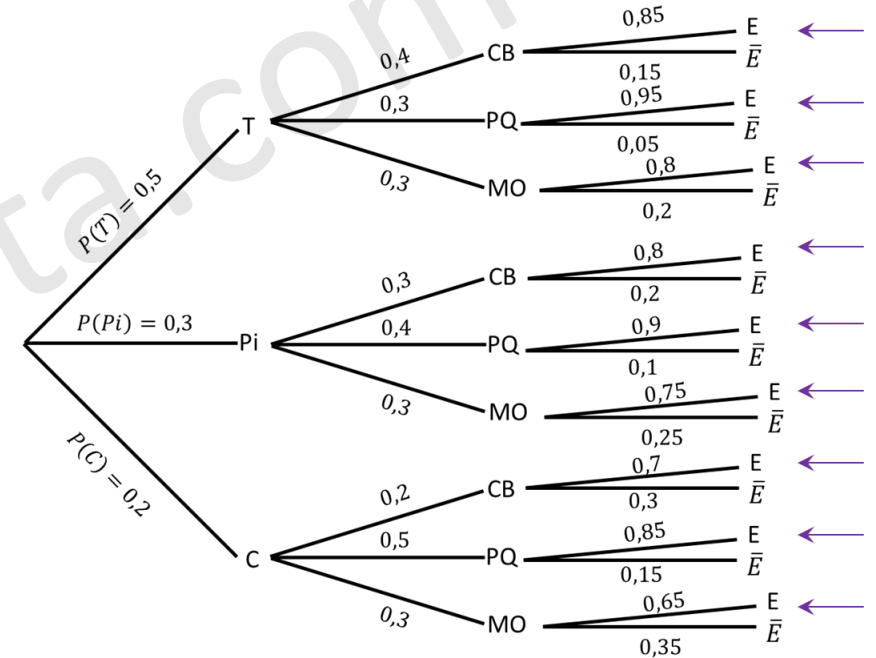
$$P(Pi \cap E) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,75 = 0,2475$$

$$P(C \cap E) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,5 \cdot 0,85 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,65 = 0,152$$

$$P(E) = P(T \cap E) + P(Pi \cap E) + P(C \cap E)$$

$$P(E) = 0,4325 + 0,2475 + 0,152 = 0,832$$

La probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas es **0,832 (83,2%)**.



PREGUNTA 1

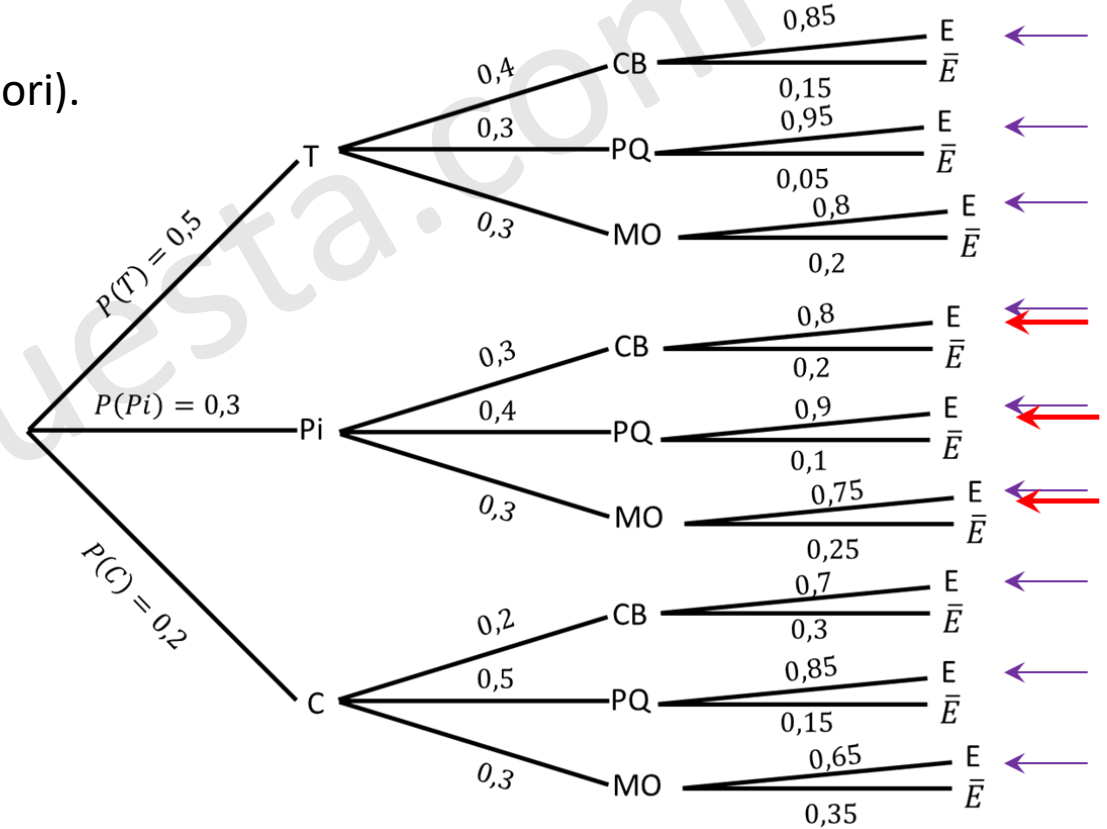
1.2 Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?

Solución: Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad a posteriori).

$$P(Pi/E) = \frac{P(Pi \cap E)}{P(E)}$$

$$P(Pi/E) = \frac{0,2475}{0,832} \approx 0,2975$$

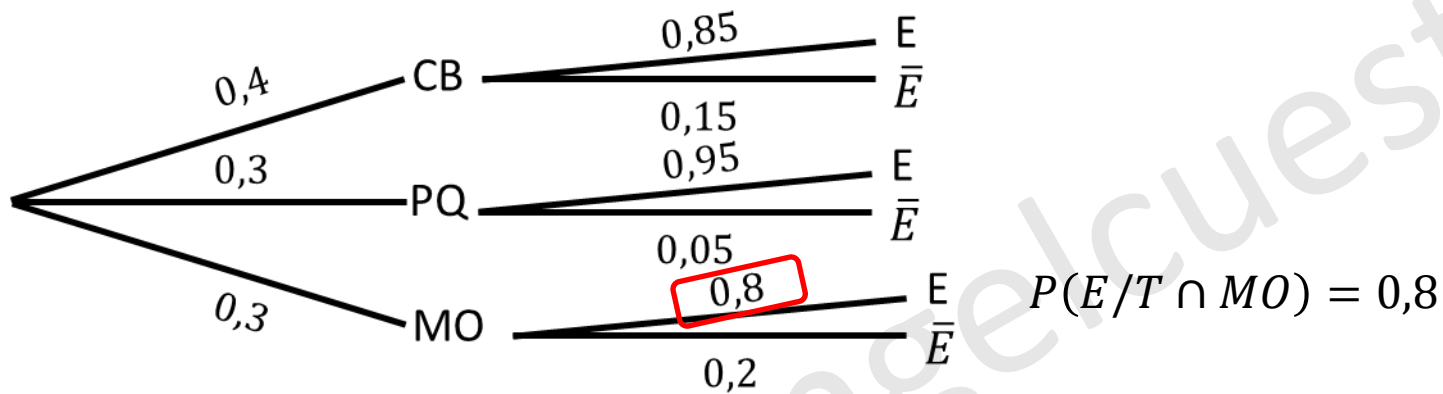
Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, la probabilidad de que esa planta sea un pimiento es **0,2975 (29,75%)** aproximadamente.



PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución: Se obtiene del diagrama de árbol la probabilidad de que un tomate tratado con métodos orgánicos haya tenido un tratamiento efectivo. Se recuerda la parte del árbol que nos hace falta.



Definimos la variable aleatoria X: **X**=número de tomates que han evitado los efectos de la plaga.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,8; q = 0,2$ $X \sim \mathbf{Bi}(11; 0,8)$

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución: X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,8; q = 0,2$ $X \sim Bi(11; 0,8)$

Se calcula la probabilidad pedida: $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$

Al tratar de utilizar la tabla, nos encontraremos con el problema de que la probabilidad de éxito igual a **0,8** no está en la tabla que nos proporcionan en el examen. **Sólo hay valores comprendidos entre 0 y 0,5.**

Por ello, debemos hacer un cambio de variable y definir una nueva variable binomial asociada al suceso contrario, es decir, el tomate NO ha evitado los efectos de la plaga.

Y=número tomates que NO ha evitado la plaga.

Y es una variable aleatoria binomial donde: $n = 11; p = 0,2; q = 0,8$ $Y \sim Bi(11; 0,2)$

Ahora debemos reescribir la pregunta en función de Y. $X + Y = 11 \longrightarrow X = 11 - Y$

$$P(X \geq 3) \xrightarrow{X = 11 - Y} P(11 - Y \geq 3) \longrightarrow P(-Y \geq -8) \longrightarrow P(Y \leq 8)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Solución:

Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
11	0		0,8953	0,5688	0,3138	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1		0,9948	0,8981	0,6974	0,3221	0,1971	0,1130	0,0751	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2		0,9998	0,9848	0,9104	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3		1,0000	0,9984	0,9815	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		1,0000	0,9999	0,9972	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	1,0000	0,9997	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7		1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

$$P(Y \leq 8) = 1,0000$$

La probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga es **1,0000**.

PREGUNTA 1

1.3 Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?

Comentario: Este apartado puede hacerse sin hacer uso de la tabla y así te ahorrarías el cambio de variable. Yo lo he hecho para enseñaros a utilizar la tabla y como hacer cambios de variable en este tipo de ejercicios. Se podría hacer por medio de la fórmula de la binomial aplicada 3 veces.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{11}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{11} = 2,048 \cdot 10^{-8}$$

$$P(X = 1) = \binom{11}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{10} = 9,0112 \cdot 10^{-7}$$

$$P(X = 2) = \binom{11}{2} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^9 = 1,80224 \cdot 10^{-5}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - 2,048 \cdot 10^{-8} - 9,0112 \cdot 10^{-7} - 1,80224 \cdot 10^{-5} = \mathbf{0,99998 \approx 1,0000}$$

Comentario: Esperemos que el día del examen los números sean más agradables de trabajar.