

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
MODELO 2025



Pregunta 2.1

Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



Ejercicio 2.1

Sea el sistema de ecuaciones donde a es un parámetro real. Se pide:

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución: Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculo el rango de A en función de a mediante un determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $1 - a^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \xrightarrow{\text{Ran}(A) \leq \text{Ran}(A^*) \leq 3} \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -1$ o $a = 1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

Ejercicio 2.1

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3=F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$ $\underbrace{\hspace{10em}}_A$

F_2	-1	2	-1	3
F_1	1	-1	1	-2
$F_2=F_2+F_1$	0	1	0	1

F_3	0	2	0	0
$-2F_2$	0	-2	0	-2
$F_3=F_3-F_2$	0	0	0	-2

F_3	1	1	1	2
$-F_1$	-1	1	-1	-2
$F_3=F_3+F_1$	0	2	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = 1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 3$** .

Ejercicio 2.1

2.1.1) Discutir el sistema en función del parámetro a .

Calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

$$\text{Si } a = -1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}]{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$
 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A$

F_2	-1	2	1	3
F_1	1	-1	-1	-2
$F_2=F_2+F_1$	0	1	0	1

F_3	-1	1	1	2
F_1	1	-1	-1	-2
$F_3=F_3+F_1$	0	0	0	0

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A^* tiene las dos filas linealmente independientes. Para $a = -1$, **$\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$** .

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.1

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = 1$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = -1$	2	2	3	S.C.I.	Infinito

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible

Para resolver el sistema de ecuaciones para $a = -1$ utilizaremos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y - z = -2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + y + z \\ z = \lambda; y = 1 \end{cases} \rightarrow x = -2 + 1 + \lambda \rightarrow x = -1 + \lambda$$

La solución del sistema si $a = -1$ es:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}; \lambda \in R$$

Ejercicio 2.1

2.1.2) Calcular las soluciones del sistema cuando este sea compatible

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales del parámetro excepto para $a = -1$ o $a = 1$. Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 1 - a^2$; $1 - a^2 \rightarrow -(a - 1) \cdot (a + 1)$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 3 & 2 & -a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{-a - 1}{1 - a^2} = \frac{-(a + 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 1)} = \boxed{\frac{1}{a - 1}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ -1 & 3 & -a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{1 - a^2}{1 - a^2} = \boxed{1}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{a + 1}{1 - a^2} = \frac{(a + 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 1)} = \boxed{\frac{-1}{a - 1}}$$

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$