

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
MODELO 2025



Pregunta 2.2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2024 Problema 1
Comunidad Valenciana



PAU Julio 2024 Problema 2
Comunidad Valenciana

Ejercicio 2.2

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

2.2.2 Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 2 - 0 - 0 + 2 = 5 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Se calculan en primer lugar las matrices A^3 y A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2

Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.1 Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$

Se calcula la matriz B a partir de las matrices obtenidas anteriormente. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 12 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$$

Las matrices pedidas son: $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5U$

Ejercicio 2.2

2.2.2 Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.

Por las propiedades de las matrices, sabemos que: $A^{-1} \cdot A = U$

Por ello debemos tratar de llegar a una expresión análoga a la de arriba con los datos dados.

Desarrollamos la expresión inicial para dejar sola la U a la derecha. Se multiplica por A en ambos lados de la igualdad.

$$A \cdot (\alpha A^2 + \beta A + U) = A \cdot A^{-1} \longrightarrow \alpha A^3 + \beta A^2 + A = U$$

Recordamos del apartado anterior que: $B = A^3 - 3A^2 + 5A = 5U \longrightarrow \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 + A = U$

Comparando las expresiones:

$$\begin{array}{l} \alpha A^3 + \beta A^2 + A = U \\ \frac{1}{5}A^3 - \frac{3}{5}A^2 + A = U \end{array} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Los valores pedidos son: $\alpha = \frac{1}{5}$ $\beta = -\frac{3}{5}$