

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 3.2
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π , de ecuaciones $r = \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi = ax + y - z = b$, con a y b parámetros reales, obtener:

3.2.1 **(1 punto)** Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

3.2.2 **(1.5 puntos)** Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Se calcula un punto y un vector director de la recta r : $r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (5,1,0) \\ \vec{w} = (1,3,4) \end{cases}$

Se calcula el vector normal del plano π : $\vec{n} = (a, 1, -1)$

Una recta y un plano son secantes si el vector director de la recta NO es perpendicular al vector normal del plano.

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = (a, 1, -1) \cdot (1, 3, 4) = a + 3 - 4 = 0 \longrightarrow a = 1$$

La recta y el plano son secantes si $a \neq 1$.

Ejercicio 3.2

3.2.1 Los valores del parámetro a para los que a y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

Se expresa en forma paramétrica la ecuación de la recta r para luego sustituirla en la ecuación del plano.

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

$$ax + y - z = b \xrightarrow{(5 + \lambda, 1 + 3\lambda, 4\lambda)} a \cdot (5 + \lambda) + 1 + 3\lambda - 4\lambda = b \longrightarrow 5a + a\lambda + 1 - \lambda = b$$

$$a\lambda - \lambda = b - 5a - 1 \longrightarrow (a - 1) \cdot \lambda = b - 5a - 1 \longrightarrow \lambda = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$$

Se obtienen las coordenadas del punto de intersección sustituyendo el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta.

Ejercicio 3.2

3.2.1 Los valores del parámetro a para los que a y π se cortan en un único punto y calcular las coordenadas de dicho punto en función del parámetro a .

$$\lambda = \frac{b - 5a - 1}{a - 1}$$

$$r: \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow x = 5 + \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{5a - 5 + b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{b - 6}{a - 1} \\ \longrightarrow y = 1 + 3 \cdot \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{a - 1 + 3b - 15a - 3}{a - 1} = \frac{-14a + 3b - 4}{a - 1} \\ \searrow z = 4 \cdot \frac{b - 5a - 1}{a - 1} = \frac{-20a + 4b - 4}{a - 1} \end{array}$$

Las coordenadas del punto de intersección entre la recta y el plano si $a \neq 1$ son:

$$P = \left(\frac{b - 6}{a - 1}, \frac{-14a + 3b - 4}{a - 1}, \frac{-20a + 4b - 4}{a - 1} \right)$$

Ejercicio 3.2

3.2.2 Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π .

Tal como se demostró en el apartado anterior, para el valor $a = 1$, la recta está contenida en el plano o es paralela al plano. Para analizar para que valores de b está contenida y para que valores de b es paralela, se tomará un punto de la recta y se comprobará si pertenece al plano o no.

$$r: \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \longrightarrow r: \begin{cases} P = (5,1,0) \\ \vec{w} = (1,3,4) \end{cases}$$

$$ax + y - z = b \xrightarrow[a=1]{(5,1,0)} 1 \cdot 5 + 1 - 0 = b \longrightarrow b = 6$$

Si $b = 6$, el punto P pertenece al plano. Por consiguiente, **la recta está contenida en el plano para $b = 6$.**

Si $b \neq 6$, el punto P **NO** pertenece al plano. Por consiguiente, **la recta es paralela al plano para $b \neq 6$.**