

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II MODELO 2025



Pregunta 4.1 Análisis de funciones

Ejercicio 4.1

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

4.1.1 **(1.25 puntos)** El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

4.1.2 **(1.25 puntos)** El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

La función $g(x)$ pasa por el punto $(-1, 0)$, por lo que: $g(-1) = (-1)^2 - b = 0 \longrightarrow b = 1$

El valor pedido es **$b = 1$** .

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

La función $f(x) = -x^2 + x + 2$ es una función cuadrática con el coeficiente numérico del término cuadrático negativo. Por ello, su gráfica será una parábola invertida.

Calculo el vértice derivando la función e igualando a cero. También podría utilizar la fórmula $v_x = \frac{-b}{2a}$

$$f'(x) = -2x + 1 \longrightarrow -2x + 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Aunque ya sé que el valor de $x = 1/2$ obtenido es la coordenada x del máximo relativo, lo demuestro utilizando el criterio de la segunda derivada.

$$f''(x) = -2 \longrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$$

Se calcula la coordenada y del vértice: $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$

Las coordenadas del vértice son: $V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.

A continuación, debemos calcular los puntos de corte con los ejes.

Puntos de corte con el eje X ($y = 0$): Se iguala la función a 0. $-x^2 + x + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje X , serán $A = (-1, 0)$ y $B = (2, 0)$

El punto de corte con el eje Y ($x = 0$): Se sustituye la x por cero en la función.

$$f(0) = -(0)^2 + 0 + 2 = 2$$

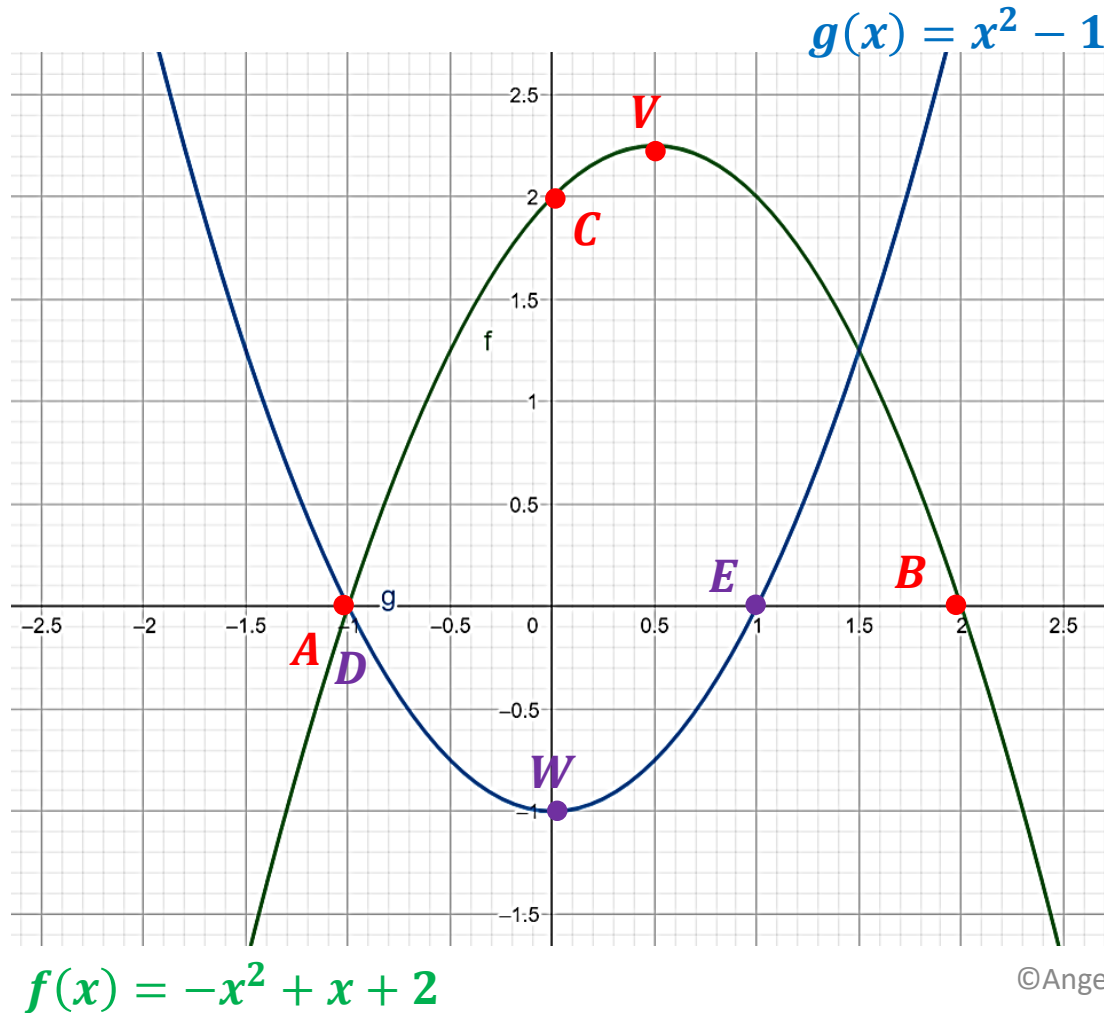
El punto de corte con el eje Y , será $C = (0, 2)$

Representaré ambas funciones sobre la misma gráfica. Por eso continuo con $g(x) = x^2 - 1$

Esta función es la parábola $y = x^2$ desplazada 1 unidad en el sentido negativo del eje Y .

Ejercicio 4.1

4.1.1 (1.25 puntos) El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.



$$V\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad A = (-1, 0) \text{ y } B = (2, 0) \quad C = (0, 2)$$

$$W(0, -1) \quad D = (-1, 0) \text{ y } E = (1, 0)$$

Ejercicio 4.1

4.1.2 El área de la superficie finita encerrada entre las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$

Utilizamos la gráfica del apartado anterior. Se deben calcular los valores de x en los que se cortan las gráficas de las funciones. Para ello se igualan sus expresiones en función de x .

$$-x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \longrightarrow -2x^2 + x + 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3/2 \end{cases}$$

Se calcula el área mediante la integral definida correspondiente.

$$A = \int_{-1}^{3/2} (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-1}^{3/2} ((-x^2 + x + 2) - (x^2 - 1)) \, dx = \int_{-1}^{3/2} (-2x^2 + x + 3) \, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{3/2}$$

$$A = \left(-\frac{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3 \cdot (-1) \right) = \frac{27}{8} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \frac{125}{24}$$

El área de la superficie finita encerrada entre las curvas es: $\frac{125}{24}$ *unidades de área*

