Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Septiembre 2020

Problema 2

Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Distancia punto-plano.

Herramientas utilizadas:

1) Determinantes.
2) Vectores.

El Enunciado

Se dan los planos π: x+y=1 y π′: x−y+z=1 y el punto P(1,−1,0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.

Solución:

En primer lugar compruebo la posición relativa de los planos.

Sus vectores normales son: $\overrightarrow{n_1} = (1,1,0)\ \ y\ \ \overrightarrow{n_2} = (1,-1,1)$

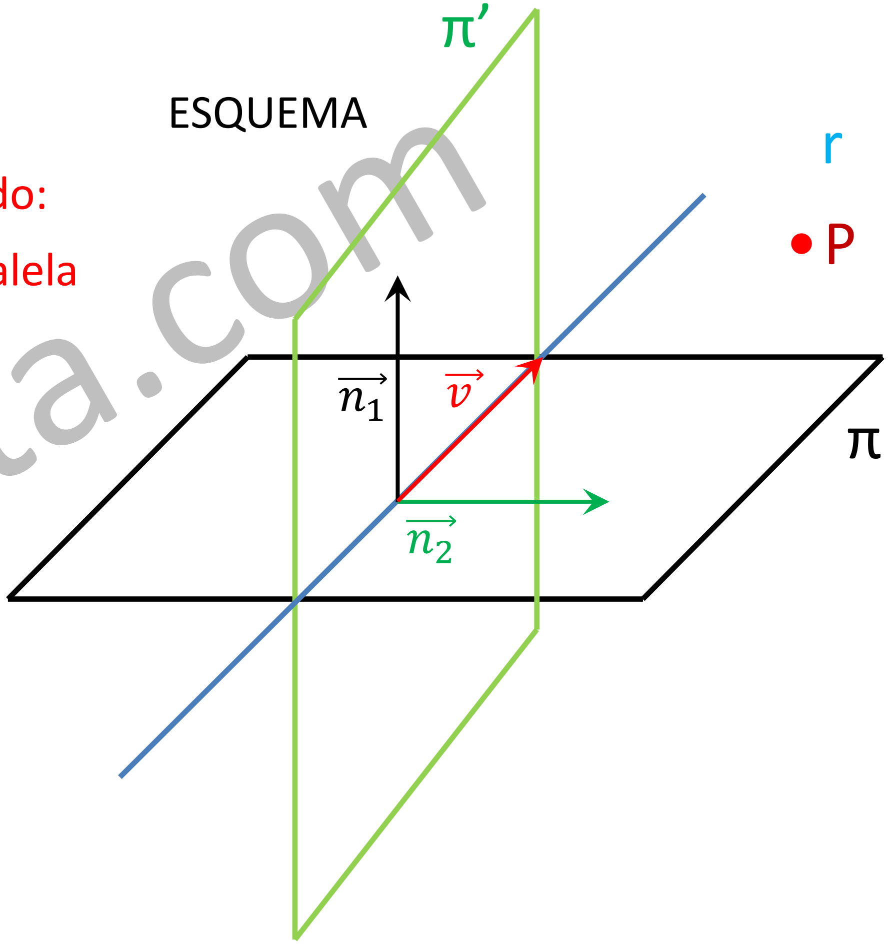
Compruebo que no son ni iguales ni proporcionales, por lo que los planos son **secantes.** $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

Al ser los planos secantes, **se cortan en una recta**. El vector director de la recta es: $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

Cálculo de la ecuación de la recta

Se dan los planos π: x+y=1 y π′: x−y+z=1 y el punto P(1,−1,0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π'.



Para que la recta sea paralela simultáneamente a ambos planos, el vector director de la recta pedida es perpendicular de forma simultánea a los dos vectores normales de los planos dados, π y π′.

Siendo: $\vec{n_1} = (1,1,0)$ $\quad \vec{n_2} = (1,-1,1)$

Para calcular el vector director de la recta r, se hace el producto vectorial de los vectores normales π y π′.

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} - (\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = (1,-1,-2)$$

A partir del punto y del vector director, obtengo las ecuaciones paramétricas de r:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}$$

Cálculo de distancia punto-plano

b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π'.

En este caso, puesto que la recta es paralela a los planos, para calcular la distancia de la recta a cada plano, se toma un punto de la recta y se calcula la distancia de dicho punto a cada plano. Tomaremos el punto P.

Siendo los planos π: $x+y-1=0$ y π′: $x-y+z-1=0$

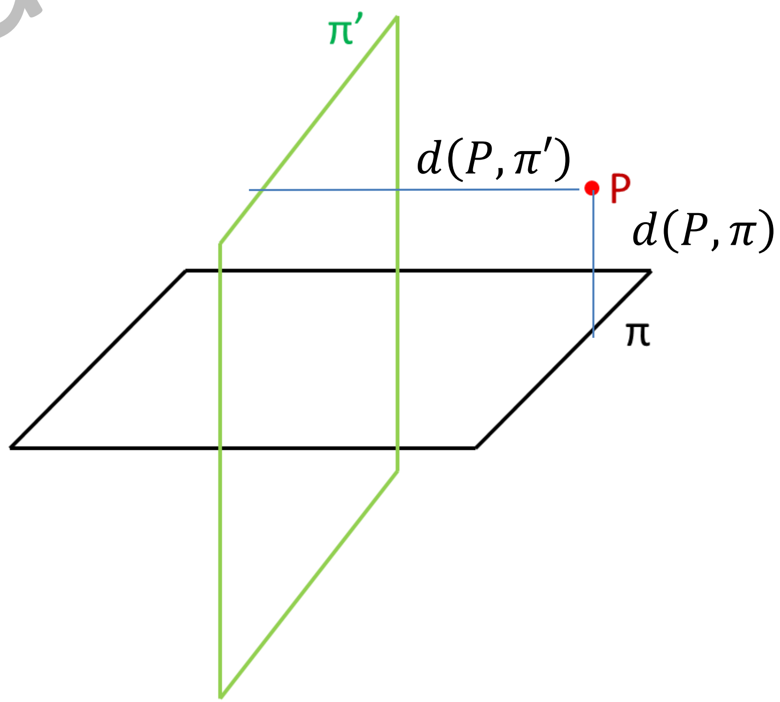
La distancia de un punto a un plano se calcula con la fórmula:

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d(P,\pi)=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-1)-0\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\ unidades}$$

$$d(P,\pi')=\frac{|1\cdot 1-1\cdot(-1)+1\cdot 0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\ unidades}$$

ESQUEMA



Calculo de la recta

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.

La recta intersección de los planos π y π' tendrá por vector director el mismo que la recta r.

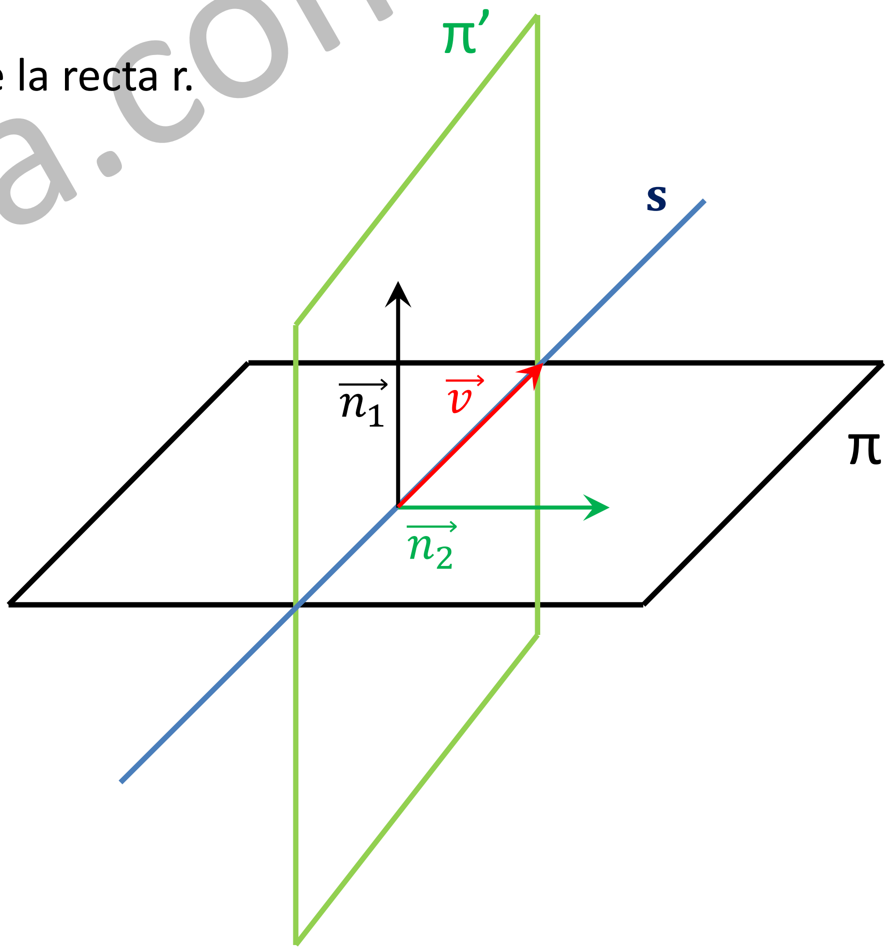
$\vec{v} = (1, -1, -2)$

Para obtener un punto de la recta intersección de los dos planos, se da un valor a x y se despejan las otras dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\textbf{x=0}} \begin{cases} \boldsymbol{y = 1} \\ -y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow -1 + z = 1 \longrightarrow \boldsymbol{z = 2}$$

El punto que pertenece a la recta intersección de π y π' es Q=(0,1,2)

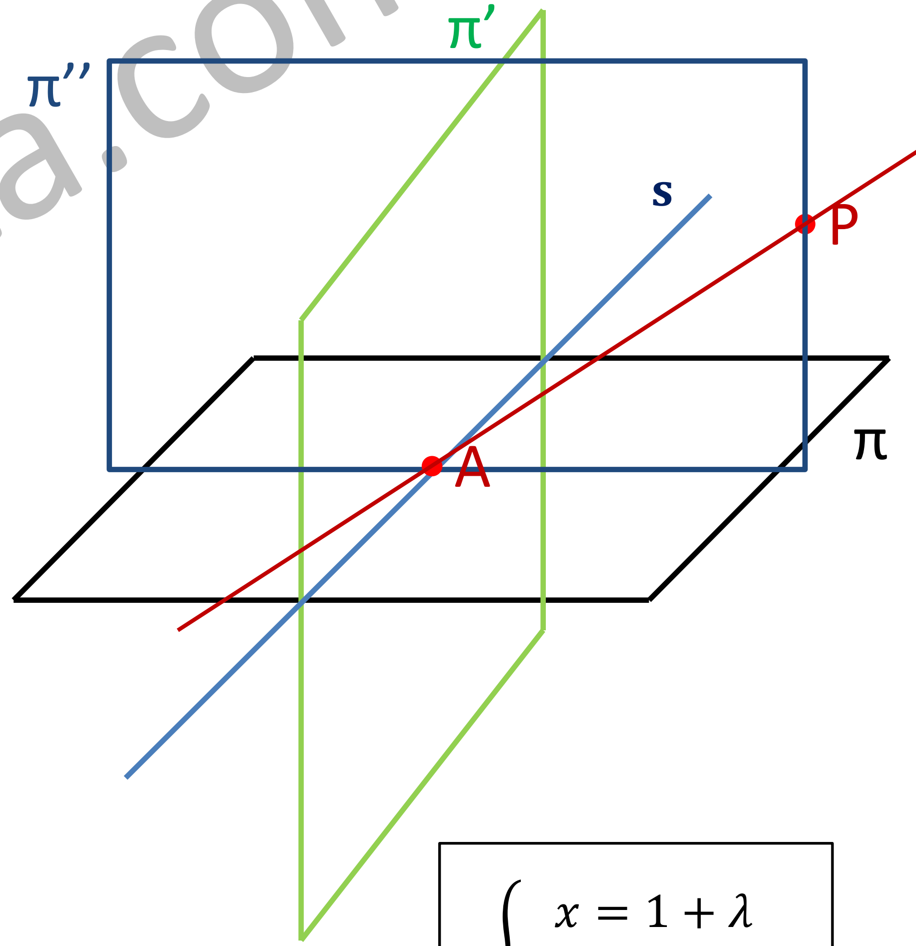
$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$



Calculo de la recta

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π'.

$$s:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$



Calculo un plano perpendicular a la recta **s** que pase por ***P*(1,−1,0).**

Obtengo el vector normal del plano. $\vec{v_s} = \vec{n} = (1, -1, -2)$

Y la ecuación: $\pi'': 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+1) - 2 \cdot (z-0) = 0$

$$\pi'': x - y - 2z - 2 = 0$$

Se calcula el punto A, intersección de la recta s y del plano π'':

$$\pi'': \lambda - (1-\lambda) - 2 \cdot (2 - 2\lambda) - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 7/6 \rightarrow A: \begin{cases} x = 7/6 \\ y = -1/6 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

La recta pedida es la que pasa por P y A.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,-1,0) - \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right) \longrightarrow \overrightarrow{AP} = (1,5,-2) \longrightarrow \boxed{t: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}$$