Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Septiembre 2020

Problema 5

Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

CONCEPTOS NECESARIOS

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Posición relativa de dos rectas.
3) Distancia entre rectas.
4) Ángulo entre dos rectas.

Herramientas utilizadas:

1) Determinantes.
2) Vectores.

El Enunciado

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \ \lambda \varepsilon \boldsymbol{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ y el plano π:3x+ay−z+1=0.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π.

b) La distancia entre las rectas r y s.

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta t: $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

Recta contenida en un plano

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \ \lambda \varepsilon \boldsymbol{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$.

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π.

Se toma un punto genérico de r y se sustituye en la ecuación del plano. $P_{\lambda,} = (1, 2 + \lambda, 2\lambda)$

$$3 \cdot 1 + a \cdot (2 + \lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow 3 + 2a + a\lambda - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow 4 + 2a + (a - 2)\lambda = 0$$

Para que la recta esté contenida en el plano, debe existir un valor de a para el cual haya infinitas soluciones.

En este caso, tanto el término independiente como el término que multiplica a λ debe ser cero.

Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente. $\begin{cases} 4 + 2a = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$

Lo que implica que dicho sistema es incompatible.

Por ello, podemos decir que **no existe ningún valor del parámetro a** para el cual la recta esté contenida en el plano π.

Posición relativa de dos rectas

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \quad \lambda \varepsilon \boldsymbol{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\quad s: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$

b) La distancia entre las rectas r y s.

Se obtiene un punto y un vector director de cada una de las rectas a partir de las ecuaciones dadas.

$$\boxed{\begin{array}{l} P_r = (1,2,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (0,1,2) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Q_s = (-1,0,-2) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-1,1) \end{array}} \qquad \boxed{\frac{0}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1}}$$

Comparando los vectores directores se observa que no son proporcionales, por los que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para comprobar si se cruzan o son secantes, basta con comprobar si los vectores $\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes. En caso de ser **linealmente independientes**, el valor del determinante que forman será **distinto de cero**.

Calculo el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$: $\quad \overrightarrow{P_rQ_s} = Q_s - P_r = (-1,0,-2) - (1,2,0) = (-2,-2,-2)$

$$[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 8 + 4 + 0 - 4 = -10 \neq 0$$

$\boxed{\text{Las rectas se \textbf{cruzan}.}}$

Calculo de la distancia de dos rectas que se cruzan

Se aplica la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan. $d_{rs} = \frac{[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$

$$[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 8 + 4 + 0 - 4 = -10$$ (hecho antes).

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} + 2\vec{i} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

$$d_{rs} = \frac{[\overrightarrow{P_rQ_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{|-10|}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$$

Como la distancia debe ser positiva, se pone el resultado en valor absoluto.

El valor de la distancia entre dos rectas es $\frac{10}{\sqrt{29}}$ unidades de longitud.

Cálculo del ángulo entre dos rectas

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 2\lambda \end{cases}$ c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta t: $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

El ángulo que forman los vectores directores de las rectas es igual al ángulo que forman las rectas, por ello se calcula dicho ángulo.

El vector director de r se obtiene por inspección directa de la ecuación: $\vec{v_r} = (0,1,2)$

El vector director de t se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que definen t:

$$\vec{v_t} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} + 0\vec{k} + 2\vec{j} - 0\vec{i} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \longrightarrow \vec{v_t} = (1,2,2)$$

Para calcular el coseno de dicho ángulo se aplica la fórmula: $\boxed{\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_t}}{|\vec{v_r}| \cdot |\vec{v_t}|}}$

$$\cos(\alpha) = \frac{(0,1,2) \cdot (1,2,2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2+4}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El valor del coseno del ángulo entre las dos rectas es $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$