Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Septiembre 2020

Problema 6
Optimización de funciones

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Optimización de funciones.

Herramientas utilizadas:

1) Derivadas.

El Enunciado

Los vértices de un triángulo son $A(0,12)$,$B(-5,0)$ y $C(5,0)$. Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas $(-x,0)$,$(x,0)$, siendo $0 \leq x \leq 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

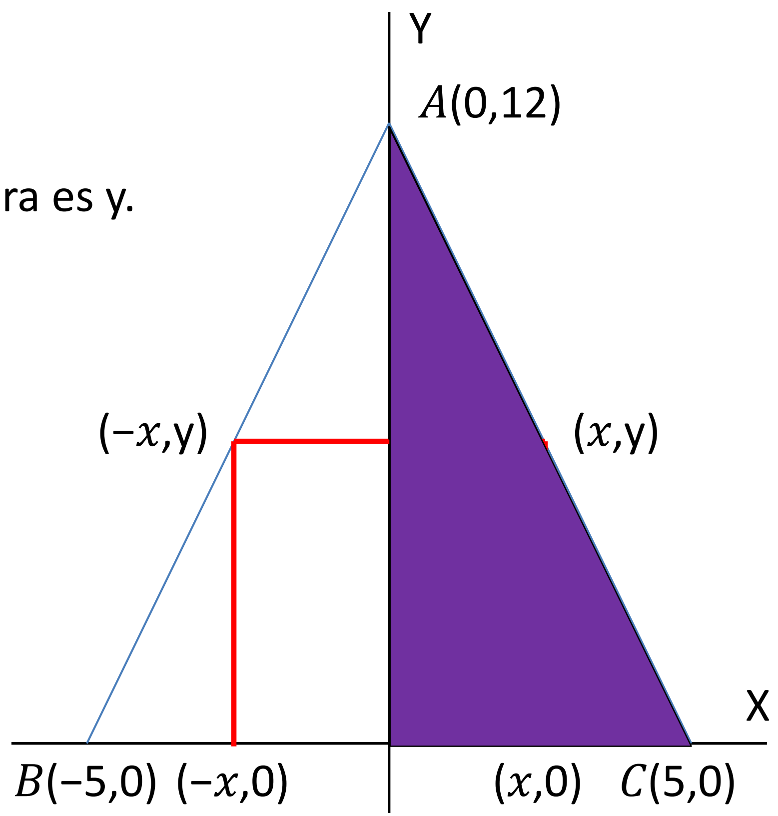
c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

Solución:

En primer lugar, debemos hacer un esquema de la situación. El valor de la altura es y.

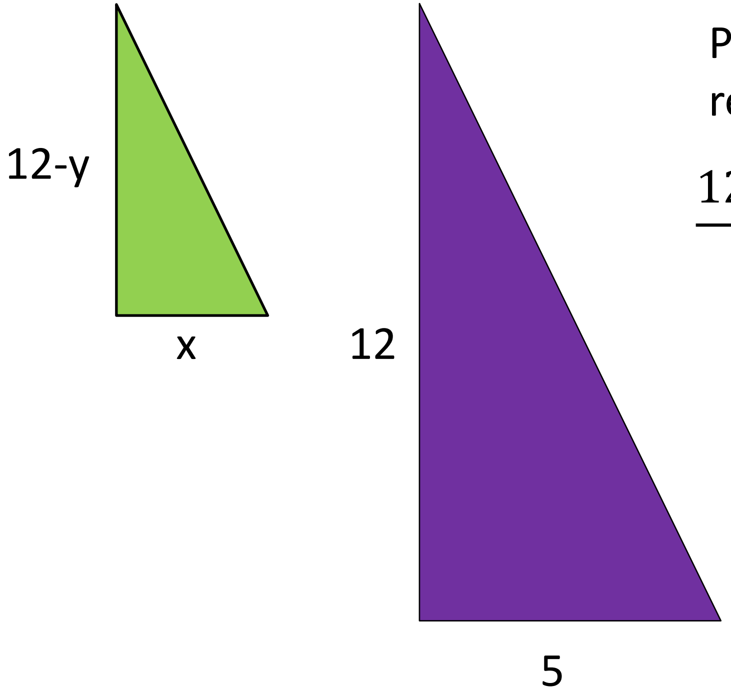
Como se puede ver, la longitud de la base es 2x.

Ahora se debe relacionar las variables x e y para poder resolver el apartado a)



Cálculo de la función a optimizar

a) La expresión $f(x)$ del área del rectángulo anterior.

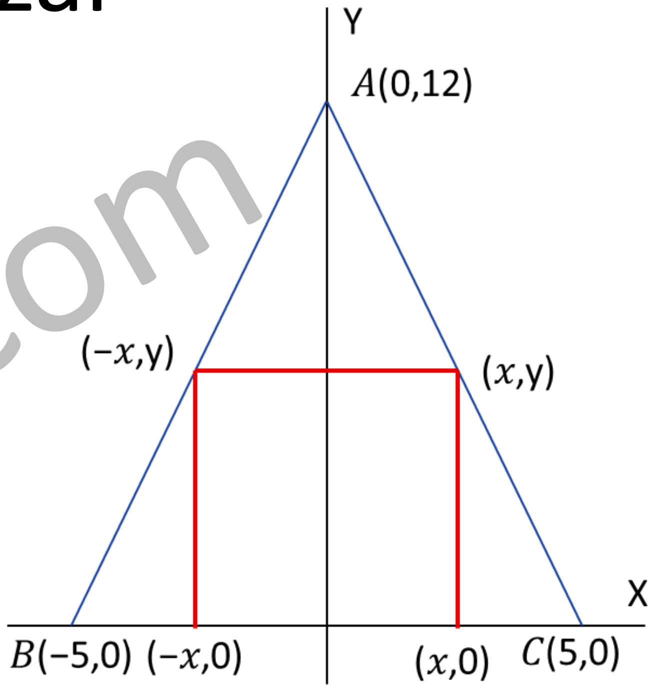


Puesto que ambos triángulos son semejantes, aplico la relación de semejanza para relacionar x e y.

$$\frac{12-y}{x}=\frac{12}{5} \longrightarrow 5\cdot(12-y)=12x$$

$$60-5y=12x$$

$$\boxed{y=12-\frac{12}{5}x}$$



Ya se puede expresar el área en función de x.

$$Área=2x\cdot y=2x\cdot\left(12-\frac{12}{5}x\right)=24x-\frac{24}{5}x^2$$

Estando comprendida x entre 0 y 5, 0<x<5.

$$\boxed{La\ expresión\ del\ área\ del\ rectángulo\ es:\ f(x)=24x-\frac{24}{5}x^2\ ; x\in(0,5)}$$

Cálculo del óptimo

b) El valor de x para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

$$f(x) = 24x - \frac{24}{5}x^2 \quad ; x \in (0,5)$$

Se debe calcular la derivada para poder calcular el máximo de la función. $f'(x) = 24 - \frac{48}{5}x$

Se iguala a cero la derivada. $24 - \frac{48}{5}x = 0 \longrightarrow x = \frac{24 \cdot 5}{48} = 2'5$

Para comprobar que el valor obtenido maximiza la función, se calcula la segunda derivada. $f''(x) = -\frac{48}{5}$

Se sustituye el valor de x obtenido en la segunda derivada. $f''(2'5) = -\frac{48}{5} < 0$

Por ser negativa la segunda derivada en x=2’5, en x=2’5 hay un máximo relativo.

El área del rectángulo es máxima para x=2’5.

Las dimensiones del rectángulo serán:

$$Base; \; 2x = 2 \cdot 2'5 = 5\, unidades$$

$$Altura; \; y = 12 - \frac{12}{5}x = 12 - \frac{12}{5} \cdot 2'5 = 6\, unidades$$

Cálculo de la proporción

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

Se calculan ambas áreas. La del rectángulo de área máxima y la del triángulo.

$$A_R = Base \cdot altura = 5 \cdot 6 = 30 \; unidades \; de \; área$$

$$A_T = \frac{Base \cdot altura}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \; unidades \; de \; área$$

La relación será: $\boxed{\frac{A_R}{A_T} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}}$