

# Selectividad Comunidad Valenciana



## Matemáticas II Septiembre 2020



### Problema 1

## Discusión de un sistema de ecuaciones



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).
- 2) Método de Gauss (Cálculo de rangos y resolución de S.C.I)

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices
- 2) Determinantes



# El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

Donde  $a$  es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) Los valores de  $a$  para los cuales el sistema es compatible.
- b) La solución del sistema cuando  $a=0$ .
- c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

## Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché  
Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de  $a$  utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2; \quad a^2 - 3a + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases}}$$

Si  $a \neq 2$  y  $a \neq 1$  entonces  $|A| \neq 0$ ,  $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si  $a = 2$  o  $a = 1$  entonces  $|A| = 0$ ,  $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$  Debo calcular el rango de A y de  $A^*$  sustituyendo los valores de  $a$  en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de  $A^*$  utilizando el método de Gauss para los valores concretos de  $a$ . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

# Discusión del Sistema

Si  $a = 2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = 5F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A\* tienen dos filas linealmente independientes, por lo que para  $a = 2$ ,  $\text{Ran}(A) = 2$  y  $\text{Ran}(A^*) = 2$

Si  $a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes, por ello para  $a = 1$ ,  $\text{Ran}(A) = 2$

En cambio, A\* tiene tres filas linealmente independientes, por lo que para  $a = 1$ ,  $\text{Ran}(A^*) = 3$

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

# Discusión y resolución del Sistema

En el cuadro remarco los valores de  $a$  para que el sistema sea compatible.

|                            | Ran(A) | Ran(A*) | Nº incógnitas | Tipo de Sistema | Número de soluciones |
|----------------------------|--------|---------|---------------|-----------------|----------------------|
| Si $a \neq 2$ y $a \neq 1$ | 3      | 3       | 3             | S.C.D.          | Única                |
| Si $a = 2$                 | 2      | 2       | 3             | S.C.I.          | Infinitas            |
| Si $a = 1$                 | 2      | 3       | 3             | S.I.            | Sin solución         |

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

## b) Las soluciones del sistema cuando $a=0$ .

Como se puede ver el Sistema es Compatible determinado. Resolveré el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2z = 3 \\ -3y - 2z = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

La solución del sistema para  $a = 0$  es:

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = -3 \\ z = 7 \end{cases}$$

# Resolución del Sistema

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Como se puede ver el Sistema es Compatible Indeterminado para  $a=2$ . Como en el apartado anterior ya hemos utilizado el método de Gauss para obtener del Rango de  $A^*$ , podemos utilizar esa misma matriz escalonada para resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ -5y = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\downarrow$

$$z = \lambda \longrightarrow x = 1 - 2\lambda$$

Las soluciones del sistema para  $a = 2$  son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y + az = -2 \\ x + y + 2z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 1 & -3 & a & -2 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II  
Septiembre 2020



Problema 2  
Geometría





# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.

# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Distancia punto-plano.

Herramientas utilizadas:

- 1) Determinantes.
- 2) Vectores.



# El Enunciado

Se dan los planos  $\pi: x+y=1$  y  $\pi': x-y+z=1$  y el punto  $P(1,-1,0)$ .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P$  y es paralela a los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .
- b) La distancia de la recta  $r$  a cada uno de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .
- c) Las ecuaciones de la recta que pasa por  $P$  y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

**Solución:**

En primer lugar compruebo la posición relativa de los planos.

Sus vectores normales son:  $\vec{n}_1 = (1,1,0)$  y  $\vec{n}_2 = (1,-1,1)$

Compruebo que no son ni iguales ni proporcionales, por lo que los planos son **secantes**.  $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

Al ser los planos secantes, **se cortan en una recta**. El vector director de la recta es:  $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

# Cálculo de la ecuación de la recta

Se dan los planos  $\pi: x+y=1$  y  $\pi': x-y+z=1$  y el punto  $P(1,-1,0)$ .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta  $r$  que pasa por el punto  $P$  y es paralela a los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

Para que la recta sea paralela simultáneamente a ambos planos, el vector director de la recta pedida es perpendicular de forma simultánea a los dos vectores normales de los planos dados,  $\pi$  y  $\pi'$ .

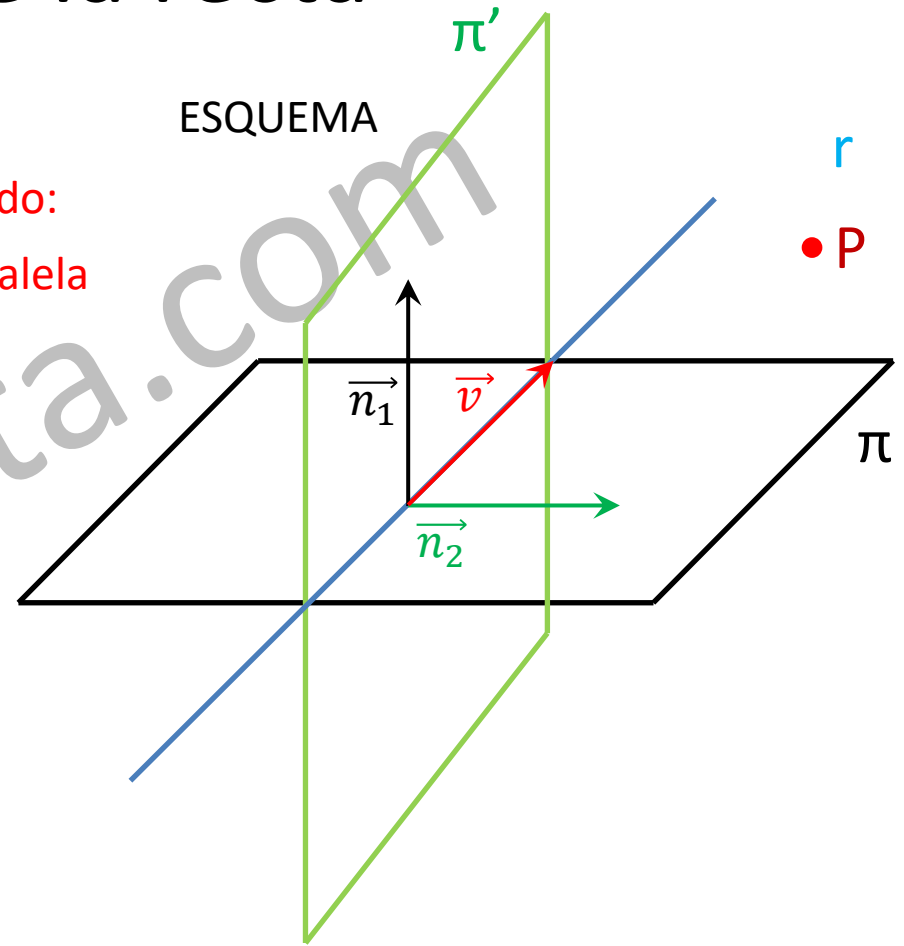
Siendo:  $\vec{n}_1 = (1,1,0)$   $\vec{n}_2 = (1,-1,1)$

Para calcular el vector director de la recta  $r$ , se hace el producto vectorial de los vectores normales  $\pi$  y  $\pi'$ .

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} - (\vec{k} + \vec{j} + 0\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = (1, -1, -2)$$

A partir del punto y del vector director, obtengo las ecuaciones paramétricas de  $r$ :

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$$



# Cálculo de distancia punto-plano

b) La distancia de la recta  $r$  a cada uno de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

En este caso, puesto que la recta es paralela a los planos, para calcular la distancia de la recta a cada plano, se toma un punto de la recta y se calcula la distancia de dicho punto a cada plano. Tomaremos el punto  $P$ .

Siendo los planos  $\pi: x+y-1=0$  y  $\pi': x-y+z-1=0$

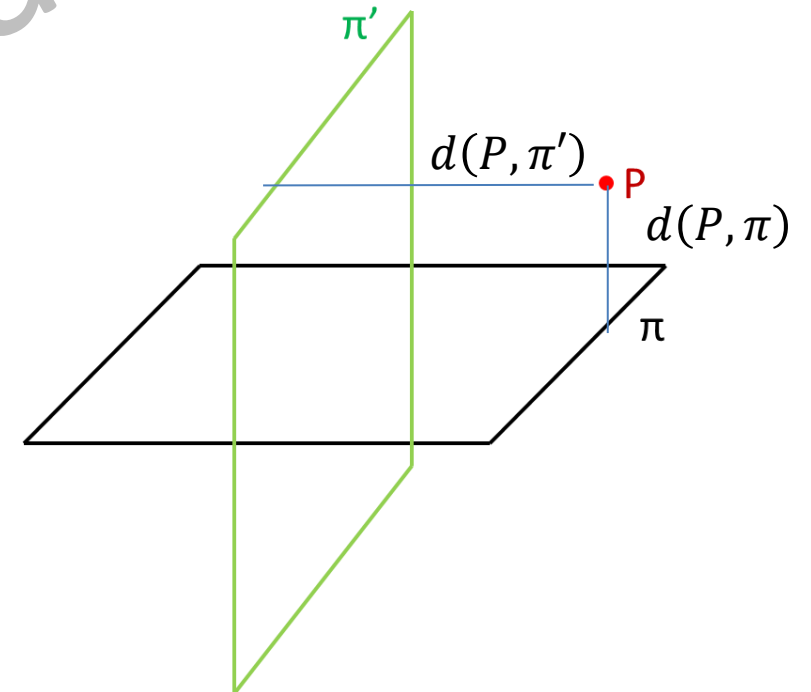
La distancia de un punto a un plano se calcula con la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ unidades}}$$

$$d(P, \pi') = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ unidades}}$$

ESQUEMA



# Calculo de la recta

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

La recta intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$  tendrá por vector director el mismo que la recta r.

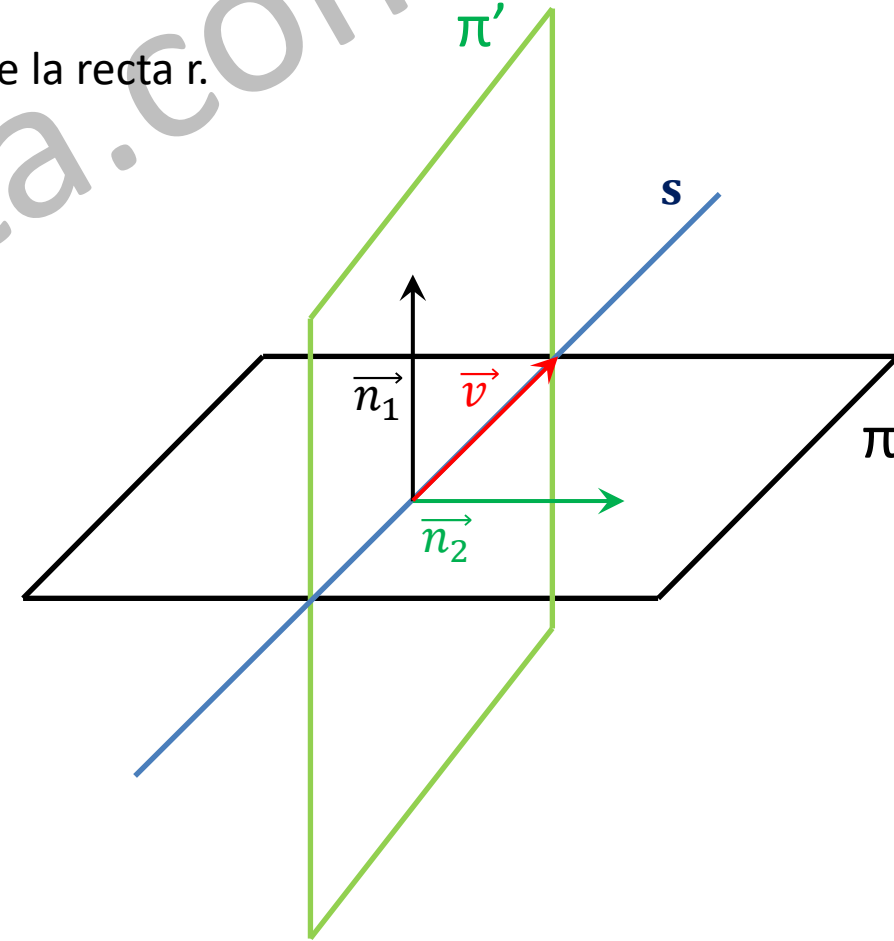
$$\vec{v} = (1, -1, -2)$$

Para obtener un punto de la recta intersección de los dos planos, se da un valor a x y se despejan las otras dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \xrightarrow{\mathbf{x=0}} \begin{cases} y = 1 \\ -y + z = 1 \end{cases} \longrightarrow -1 + z = 1 \longrightarrow z = 2$$

El punto que pertenece a la recta intersección de  $\pi$  y  $\pi'$  es  $Q=(0,1,2)$

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$



# Calculo de la recta

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ .

$$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Calculo un plano perpendicular a la recta  $s$  que pase por  $P(1, -1, 0)$ .

Obtengo el vector normal del plano.  $\vec{v}_s = \vec{n} = (1, -1, -2)$

Y la ecuación:  $\pi'': 1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y + 1) - 2 \cdot (z - 0) = 0$

$$\pi'': x - y - 2z - 2 = 0$$

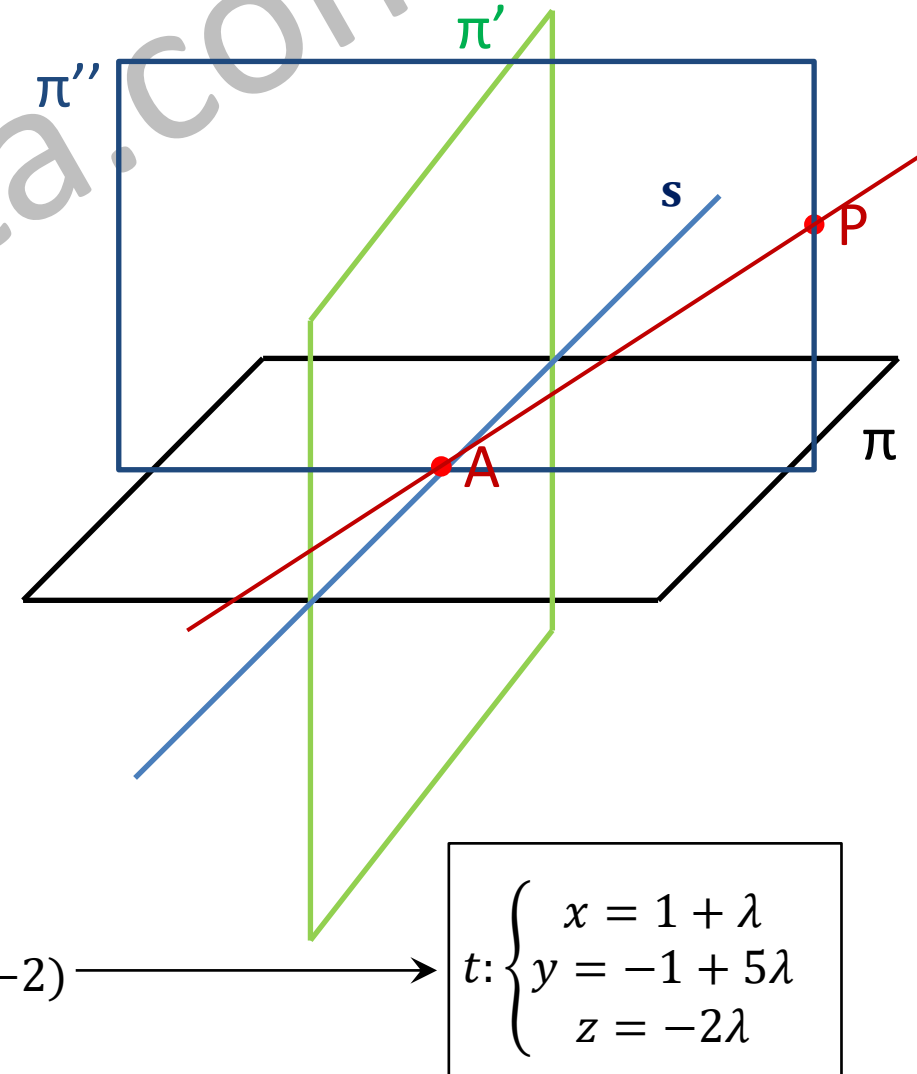
Se calcula el punto A, intersección de la recta  $s$  y del plano  $\pi''$ :

$$\pi'': \lambda - (1 - \lambda) - 2 \cdot (2 - 2\lambda) - 2 = 0 \rightarrow \lambda = 7/6 \rightarrow A: \begin{cases} x = 7/6 \\ y = -1/6 \\ z = -1/3 \end{cases}$$

La recta pedida es la que pasa por P y A.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1, -1, 0) - \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \overrightarrow{AP} = (1, 5, -2)$$

©Angel Cuesta Arza



# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II  
Septiembre 2020



[www.angelcuesta.com](http://www.angelcuesta.com)

## Problema 3

### Análisis de funciones e integrales





# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Dominio de una función.
- 2) Asíntotas de una función.
- 3) Estudio de la monotonía de una función.
- 4) Cálculo de la integral definida de una función.

Herramientas utilizadas:

- 1) Inecuaciones de segundo grado.
- 2) Límites.
- 3) Derivadas.
- 4) Integrales.



# El Enunciado

Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función  $f$ .

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

c) El valor de  $\int_2^3 f(x)dx$

## Solución:

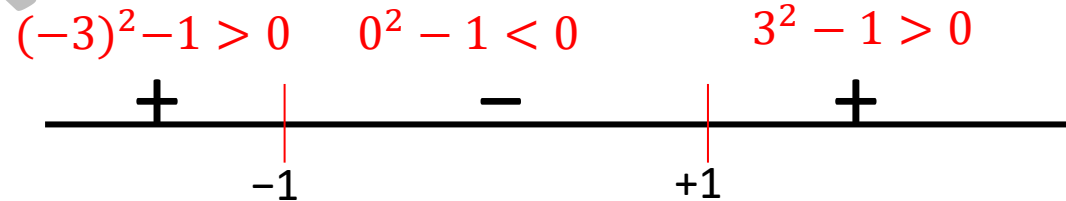
El dominio de una función con una raíz cuadrada en el denominador serán aquellos valores de  $x$ , tales que el valor de dentro de la raíz sea estrictamente mayor que cero.

$$x^2 - 1 > 0$$

Para resolver la inecuación de segundo grado, se debe hacer un estudio de signos. Para ello se resuelve primero la ecuación que define.

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm 1$$

Y se hace el estudio de signos.



Por ello, el dominio de  $f(x)$  será:  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

# Cálculo de las asíntotas

Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función  $f$ .

Las asíntotas verticales pueden ser los valores de  $x$  que anulan al denominador, es decir:  $x=-1$  y  $x=1$ . Debemos comprobarlo.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \nexists$$

$x=1$  es asíntota vertical por la derecha.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \nexists$$

$x=-1$  es asíntota vertical por la izquierda.

La asíntota horizontal se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|} = 1$$

$y=1$  es asíntota horizontal cuando  $x$  tiende a más infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

$y=-1$  es asíntota horizontal cuando  $x$  tiende a menos infinito.

$f(x)$  no presenta asíntota oblicua porque tiene asíntota horizontal.

# Estudio de la monotonía

Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

Para estudiar la monotonía calculamos  $f'(x)$  y estudiamos su signo.

Se aplica la regla del cociente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} \longrightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-1} - \frac{2x^2}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} \longrightarrow f'(x) = \frac{x^2-1-x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1) \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

Se puede comprobar que  **$f'(x)$  es siempre negativa** en el dominio de  $f(x)$ .

Ello es debido a que el **numerador** es siempre negativo y el **denominador** es siempre positivo ya que  $x^2-1 > 0$  en el dominio de  $f(x)$ .

Por ello,  $f(x)$  es decreciente en todo su dominio.

# Representación gráfica

Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función.

Se representan en primer lugar las asíntotas, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado a).

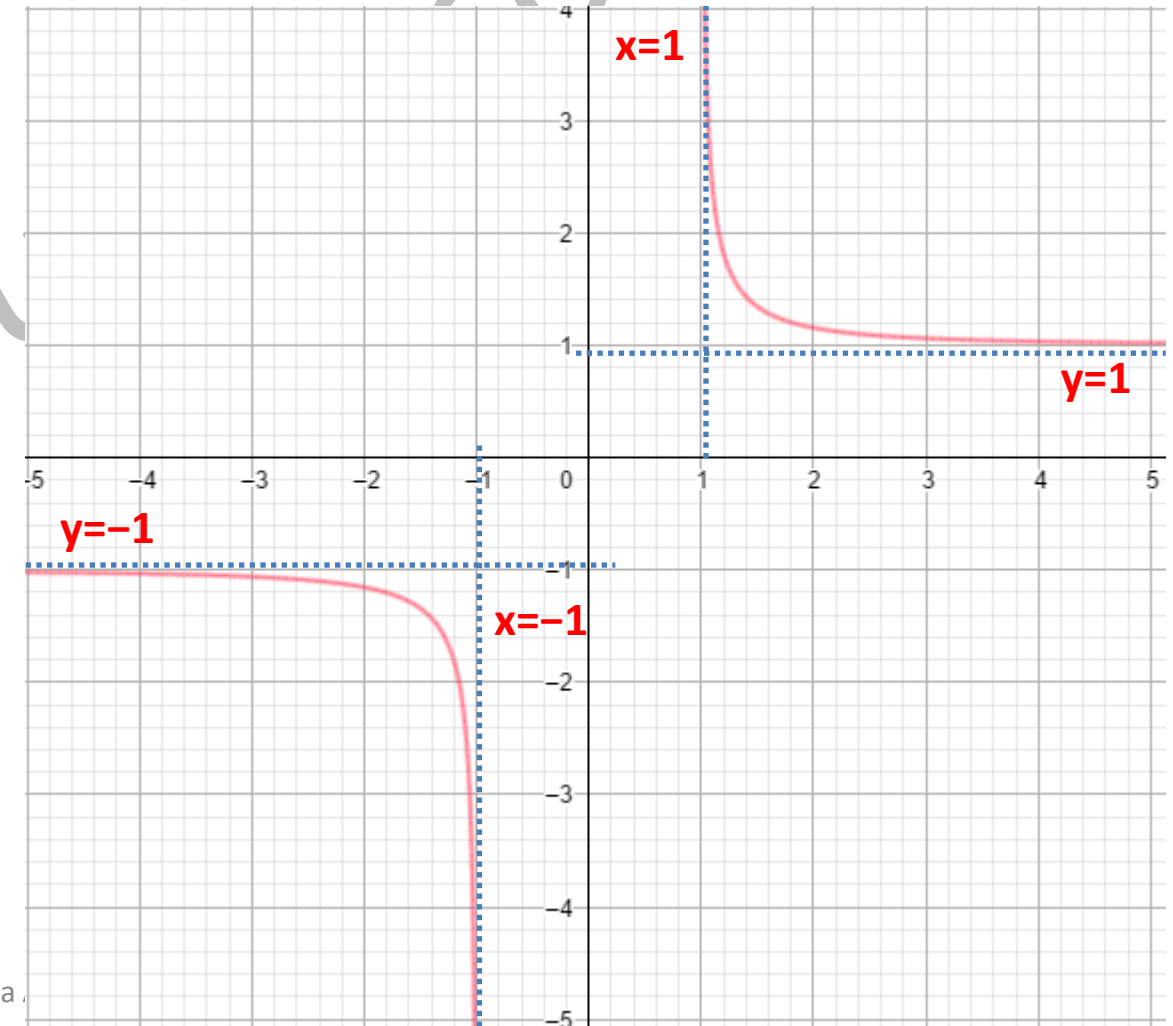
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$y=1$  es asíntota horizontal cuando  $x$  tiende a más infinito.

$y=-1$  es asíntota horizontal cuando  $x$  tiende a menos infinito.

También tenemos en cuenta que la función es decreciente en todo su dominio.



# Calculo de la integral

Dada la función  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ , obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

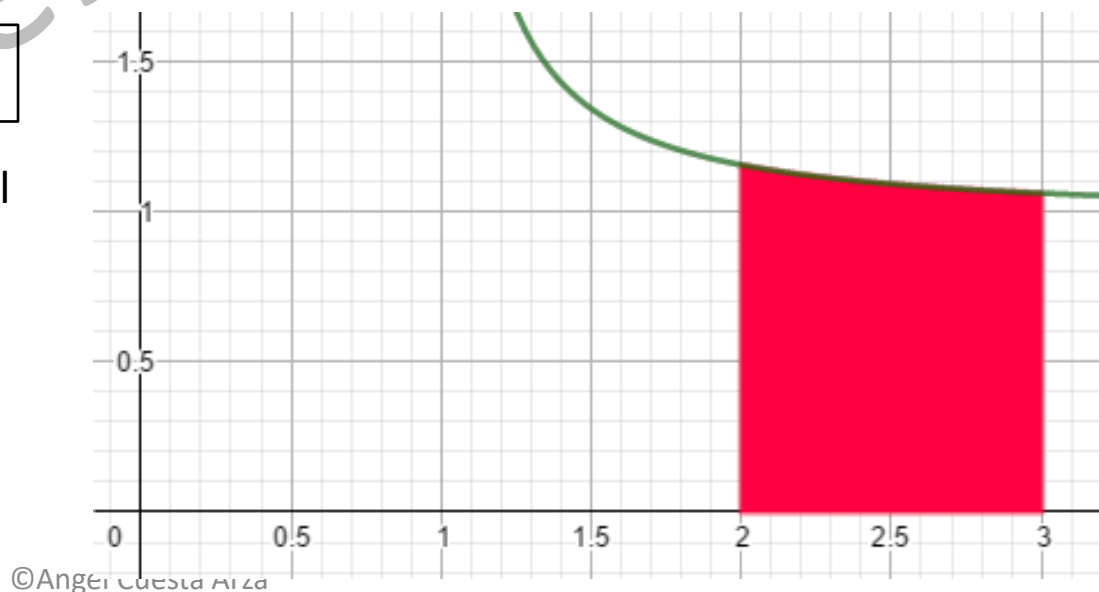
c) El valor de  $\int_2^3 f(x)dx$

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_2^3 \frac{2 \cdot x}{2 \cdot \sqrt{x^2-1}} dx = \left[ \sqrt{x^2-1} \right]_2^3 = \sqrt{3^2-1} - \sqrt{2^2-1} = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

Debemos tener en cuenta la regla de integración:  $\int \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}} dx = \sqrt{f(x)} + C$

Por lo tanto, el valor de la integral pedida es  $\sqrt{8} - \sqrt{3}$ .

Este valor representa el área comprendida entre  $f(x)$ , el eje X y las rectas  $x=2$  y  $x=3$ .



# Selectividad Comunidad Valenciana



## Matemáticas II Septiembre 2020



### Problema 4

## Matrices y discusión de sistemas





# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Cálculo de la matriz inversa.
- 2) Álgebra matricial.
- 3) Teorema de Rouché (Discusión del Sistema).

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices.
- 2) Determinantes.



# El Enunciado

Sea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que  $A$  tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

b) Dos constantes  $a, b$  de modo que  $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ . Se puede usar (sin comprobarlo) que  $A$  verifica la ecuación  $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$  siendo  $I$  la matriz identidad.

c) El valor de  $\lambda$  para que el sistema de ecuaciones  $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de  $\lambda$  hallar todas las soluciones del sistema.

# Cálculo la matriz inversa

Sea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  a) La justificación de que  $A$  tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa.

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo  $|A|$ ;  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz  $A$  **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos:  $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos:  $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula:  $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow (A)^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

# Cálculo de $a$ y $b$ . Propiedades de las matrices.

b) Dos constantes  $a, b$  de modo que  $A^{-1} = A^2 + aA + bI$ . Se puede usar (sin comprobarlo) que  $A$  verifica la ecuación  $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$  siendo  $I$  la matriz identidad.

Aprovechamos los datos del enunciado para resolver el ejercicio.

Utilizamos la matriz inversa porque hemos demostrado que existe.

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0 \longrightarrow A^3 = 3A^2 - 3A + I \longrightarrow A^{-1} \cdot A^3 = A^{-1} \cdot (3A^2 - 3A + I) \longrightarrow A^2 = 3A - 3I + A^{-1}$$

Despejo  $A^{-1}$ :

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$$

Comparo con la expresión:  $A^{-1} = A^2 + aA + bI \longrightarrow a = -3; b = 3$

# Discusión y resolución de un sistema homogéneo

Sea:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

c) El valor de  $\lambda$  para que el sistema de ecuaciones  $(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de  $\lambda$  hallar todas las soluciones del sistema.

Se obtiene el sistema que define la ecuación del enunciado.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ 2y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Se observa que el sistema es **homogéneo**.

# Discusión y resolución de un sistema homogéneo

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ 2y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Para discutir el sistema de ecuaciones, utilizaré el teorema de Rouché-Frobenius

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, al ser la última columna de la matriz ampliada toda de ceros (por ser el sistema homogéneo), el rango de A y el rango de A\* coincidirán.

Cálculo del rango de A en función de  $\lambda$  utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3 \longrightarrow (1 - \lambda)^3 = 0 \longrightarrow \lambda = 1$$

Si  $\lambda \neq 1$ ,  $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A^*) = n^\circ$  de incógnitas = 3, por lo que el sistema será compatible determinado.

Si  $\lambda = 1$ ,  $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A^*) = 1$ ;  $n^\circ$  de incógnitas = 3, por lo que el sistema será compatible indeterminado.

**Por lo que para que el sistema tenga infinitas soluciones,  $\lambda = 1$**

# Discusión y resolución de un sistema homogéneo

Para calcular las soluciones se sustituye,  $\lambda = 1$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x + 2y = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ 2y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$



# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II  
Septiembre 2020



Problema 5

Geometría



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# CONCEPTOS NECESARIOS

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Posición relativa de dos rectas.
- 3) Distancia entre rectas.
- 4) Ángulo entre dos rectas.

Herramientas utilizadas:

- 1) Determinantes.
- 2) Vectores.



**ÁNGEL CUESTA**

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

# El Enunciado

Se dan las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$   $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$  y el plano  $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$ .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Si hay algún valor del parámetro  $a$  para el cual la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ .
- b) La distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .
- c) El coseno del ángulo que forman la recta  $r$  y la recta  $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

# Recta contenida en un plano

Se dan las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$   $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$  y el plano  $\pi: 3x + ay - z + 1 = 0$ .

a) Si hay algún valor del parámetro  $a$  para el cual la recta  $r$  está contenida en el plano  $\pi$ .

Se toma un punto genérico de  $r$  y se sustituye en la ecuación del plano.  $P_\lambda = (1, 2 + \lambda, 2\lambda)$

$$3 \cdot 1 + a \cdot (2 + \lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow 3 + 2a + a\lambda - 2\lambda + 1 = 0 \longrightarrow 4 + 2a + (a - 2)\lambda = 0$$

Para que la recta esté contenida en el plano, debe existir un valor de  $a$  para el cual haya infinitas soluciones.

En este caso, tanto el término independiente como el término que multiplica a  $\lambda$  debe ser cero.

Planteamos el sistema de ecuaciones correspondiente.  $\begin{cases} 4 + 2a = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$

Lo que implica que dicho sistema es incompatible.

Por ello, podemos decir que **no existe ningún valor del parámetro  $a$**  para el cual la recta esté contenida en el plano  $\pi$ .

# Posición relativa de dos rectas

Se dan las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \lambda \in \mathbf{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$   $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$

b) La distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

Se obtiene un punto y un vector director de cada una de las rectas a partir de las ecuaciones dadas.

$$P_r = (1, 2, 0)$$

$$\vec{v}_r = (0, 1, 2)$$

$$Q_s = (-1, 0, -2)$$

$$\vec{v}_s = (2, -1, 1)$$

$$\frac{0}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{2}{1}$$

Comparando los vectores directores se observa que no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para comprobar si se cruzan o son secantes, basta con comprobar si los vectores  $\overrightarrow{P_r Q_s}$ ,  $\vec{v}_r$ ,  $\vec{v}_s$  son linealmente independientes. En caso de ser **linealmente independientes**, el valor del determinante que forman será **distinto de cero**.

Calculo el vector  $\overrightarrow{P_r Q_s}$ :  $\overrightarrow{P_r Q_s} = Q_s - P_r = (-1, 0, -2) - (1, 2, 0) = (-2, -2, -2)$

$$[\overrightarrow{P_r Q_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 8 + 4 + 0 - 4 = -10 \neq 0$$

Las rectas se **cruzan**.

# Calculo de la distancia de dos rectas que se cruzan

Se aplica la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan.  $d_{rs} = \frac{[\overrightarrow{P_r Q_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}$

$$[\overrightarrow{P_r Q_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 8 + 4 + 0 - 4 = -10 \quad (\text{hecho antes}).$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k} - 2\vec{k} - 0\vec{j} + 2\vec{i} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$$

$$d_{rs} = \frac{[\overrightarrow{P_r Q_s}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}]}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{|-10|}{\sqrt{29}} = \frac{10}{\sqrt{29}}$$

Como la distancia debe ser positiva, se pone el resultado en valor absoluto.

El valor de la distancia entre dos rectas es  $\frac{10}{\sqrt{29}}$  unidades de longitud.

# Cálculo del ángulo entre dos rectas

Se dan las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda, \\ z = 2\lambda \end{cases}$  c) El coseno del ángulo que forman la recta  $r$  y la recta  $t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$

El ángulo que forman los vectores directores de las rectas es igual al ángulo que forman las rectas, por ello se calcula dicho ángulo.

El vector director de  $r$  se obtiene por inspección directa de la ecuación:  $\vec{v}_r = (0,1,2)$

El vector director de  $t$  se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que definen  $t$ :

$$\vec{v}_t = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} + 0\vec{k} + 2\vec{j} - 0\vec{i} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \longrightarrow \vec{v}_t = (1,2,2)$$

Para calcular el coseno de dicho ángulo se aplica la fórmula:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_t}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_t|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(0,1,2) \cdot (1,2,2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2+4}{3 \cdot \sqrt{5}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El valor del coseno del ángulo entre las dos rectas es  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$



# Selectividad Comunidad Valenciana



## Matemáticas II Septiembre 2020



[www.angelcuesta.com](http://www.angelcuesta.com)

## Problema 6 Optimización de funciones



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Optimización de funciones.

Herramientas utilizadas:

1) Derivadas.



# El Enunciado

Los vértices de un triángulo son  $A(0,12)$ ,  $B(-5,0)$  y  $C(5,0)$ . Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas  $(-x,0)$ ,  $(x,0)$ , siendo  $0 \leq x \leq 5$ . Los otros dos vértices están situados en los segmentos  $AB$  y  $AC$ .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

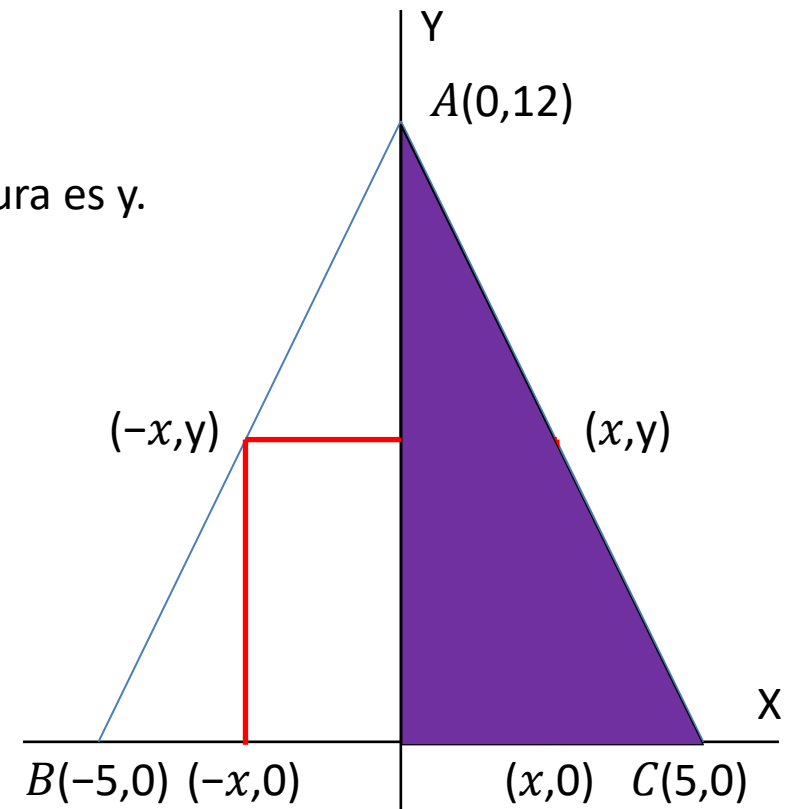
- La expresión  $f(x)$  del área del rectángulo anterior.
- El valor de  $x$  para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.
- La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

## Solución:

En primer lugar, debemos hacer un esquema de la situación. El valor de la altura es  $y$ .

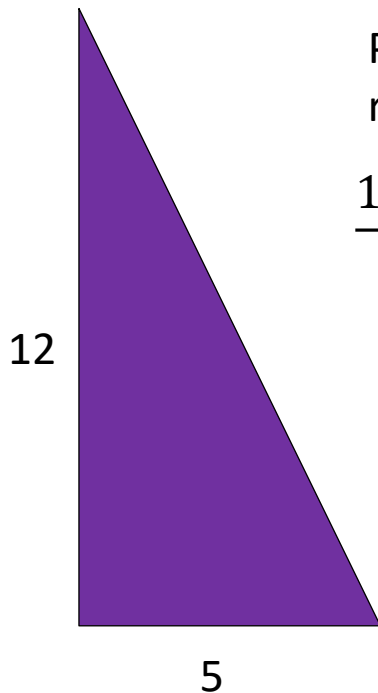
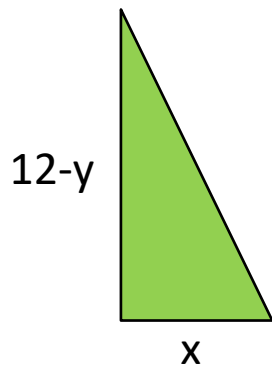
Como se puede ver, la longitud de la base es  $2x$ .

Ahora se debe relacionar las variables  $x$  e  $y$  para poder resolver el apartado a)



# Cálculo de la función a optimizar

a) La expresión  $f(x)$  del área del rectángulo anterior.



Puesto que ambos triángulos son semejantes, aplico la relación de semejanza para relacionar  $x$  e  $y$ .

$$\frac{12 - y}{x} = \frac{12}{5} \longrightarrow 5 \cdot (12 - y) = 12x$$

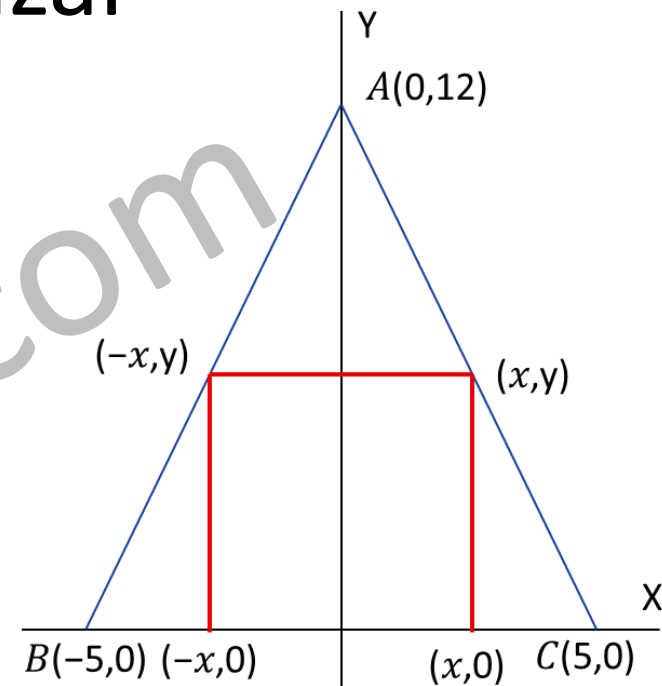
$$60 - 5y = 12x$$

$$y = 12 - \frac{12}{5}x$$

Ya se puede expresar el área en función de  $x$ .

$$\text{Área} = 2x \cdot y = 2x \cdot \left(12 - \frac{12}{5}x\right) = 24x - \frac{24}{5}x^2$$

Estando comprendida  $x$  entre 0 y 5,  $0 < x < 5$ .



La expresión del área del rectángulo es:  $f(x) = 24x - \frac{24}{5}x^2$ ;  $x \in (0,5)$

# Cálculo del óptimo

b) El valor de  $x$  para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido.

$$f(x) = 24x - \frac{24}{5}x^2 \quad ; x \in (0,5)$$

Se debe calcular la derivada para poder calcular el máximo de la función.  $f'(x) = 24 - \frac{48}{5}x$

Se iguala a cero la derivada.  $24 - \frac{48}{5}x = 0 \longrightarrow x = \frac{24 \cdot 5}{48} = 2'5$

Para comprobar que el valor obtenido maximiza la función, se calcula la segunda derivada.  $f''(x) = -\frac{48}{5}$

Se sustituye el valor de  $x$  obtenido en la segunda derivada.  $f''(2'5) = -\frac{48}{5} < 0$

Por ser negativa la segunda derivada en  $x=2'5$ , en  $x=2'5$  hay un máximo relativo.

El área del rectángulo es máxima para  $x=2'5$ .

Las dimensiones del rectángulo serán:

$$\text{Base; } 2x = 2 \cdot 2'5 = 5 \text{ unidades}$$

$$\text{Altura; } y = 12 - \frac{12}{5}x = 12 - \frac{12}{5} \cdot 2'5 = 6 \text{ unidades}$$

# Cálculo de la proporción

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo.

Se calculan ambas áreas. La del rectángulo de área máxima y la del triángulo.

$$A_R = \text{Base} \cdot \text{altura} = 5 \cdot 6 = 30 \text{ unidades de área}$$

$$A_T = \frac{\text{Base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ unidades de área}$$

La relación será:

$$\frac{A_R}{A_T} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$