El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas Aplicadas a las CCSS
Opción A, Problema 2
Julio 2019

Análisis de una función y representación gráfica.

www.angelcuesta.com

© Angel Cuesta Arza

El Enunciado

2) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

www.angelcuesta.com

© Angel Cuesta Arza

Dominio y puntos de corte con los ejes

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-2, 1\}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 2 * 0 - 3}{0^2 + 0 - 2} = \frac{3}{2} \rightarrow \boldsymbol{A = \left(0, \frac{3}{2}\right)}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por ello los puntos de corte con el eje X serán: $\boldsymbol{B = (3, 0)}$ y $\boldsymbol{C = (-1, 0)}$.

www.angelcuesta.com

© Angel Cuesta Arza

Asíntotas Verticales

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=-2;

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{5}{0}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty\end{cases}, luego\ x=-2\ es\ A.V.de\ f(x)$$

En x=1;

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{-4}{0}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\dfrac{-4}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\dfrac{-4}{0^-}=+\infty\end{cases}, luego\ x=1\ es\ A.V.de\ f(x)$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

www.angelcuesta.com

© Angel Cuesta Arza

Asíntota Horizontal/Esbozo Asíntotas

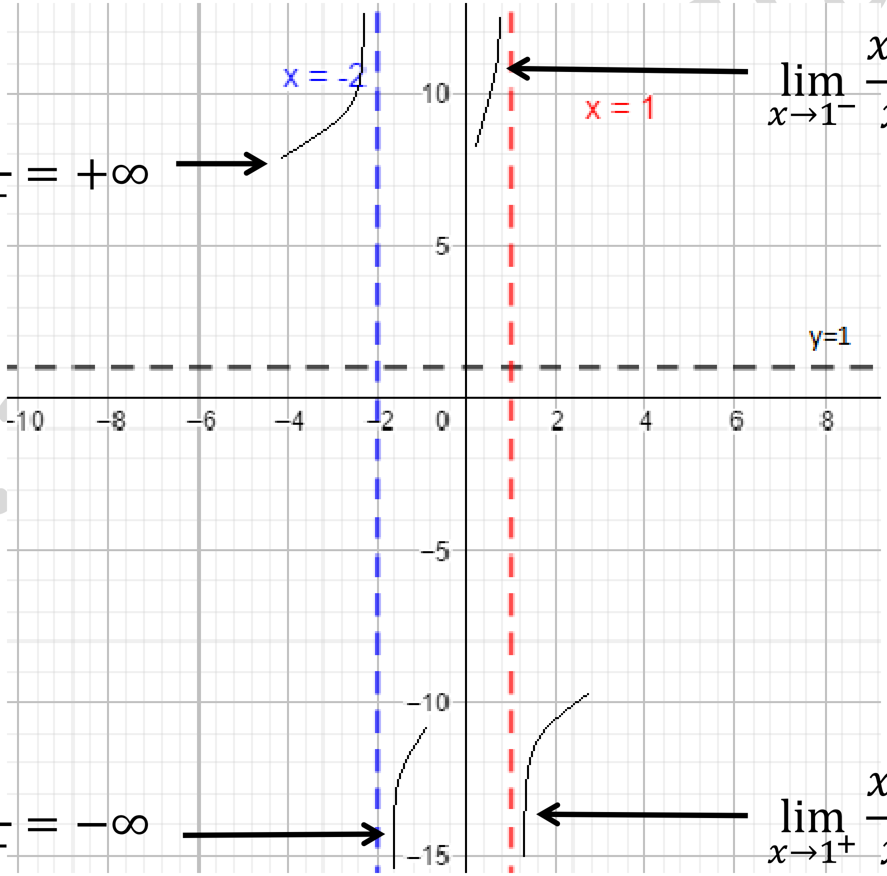
La asíntota horizontal se calcula con el límite en infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1, luego\ y=1\ es\ A.H.de\ f(x)$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$



$$\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=\frac{-4}{0^+}=-\infty$$

Estudio de la monotonía

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)*(x^2+x-2)-(x^2-2x-3)*(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} = 0 \rightarrow 3x^2+2x+7=0 \rightarrow No\ tiene\ solución.$$

Se estudia el signo de la derivada: Para ello damos valores a la derivada en los 3 intervalos que define el dominio, ya que la derivada no tiene ceros.

	(-∞,-2)	-2	(-2,1)	1	(1,+∞)
f(x)	↗	∄	↗	∄	↗
f'(x)	+	∄	+	∄	+

Se observa que f(x) es creciente en todo su dominio.

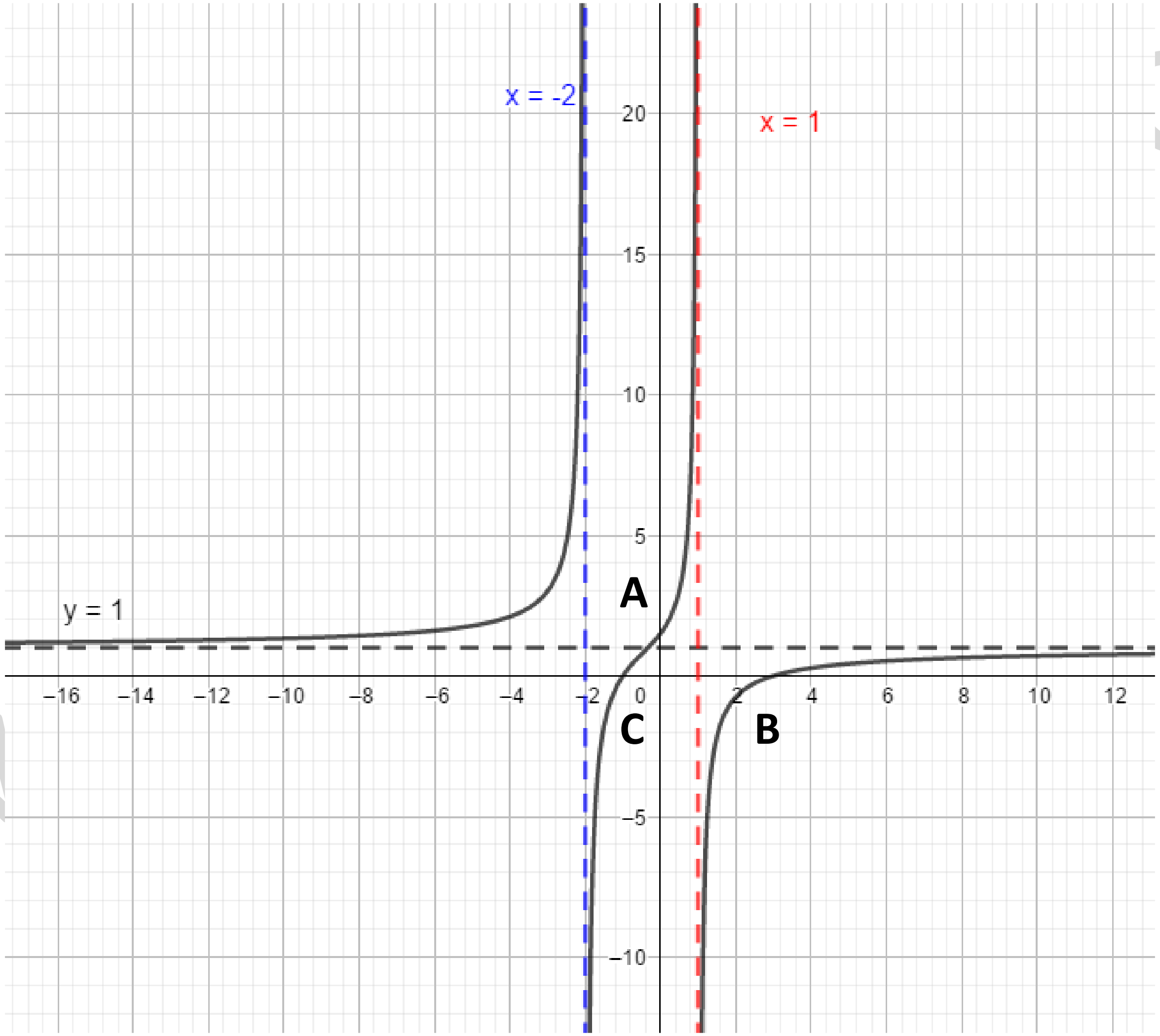
Por otro lado también comprobamos que la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos, pues la derivada no se anula para ningún valor de x.

www.angelcuesta.com

© Angel Cuesta Arza

Representación Gráfica

Utilizando todos los datos obtenidos en los apartados anteriores, puntos de corte y asíntotas, podemos esbozar la gráfica.



© Angel Cuesta Arza