El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 1

Julio 2019

Matrices y determinantes

El enunciado

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $A * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cálculo del determinante

Para calcular el determinante utilizaremos la regla de Sarrus, pero sacaremos factor común previamente para que los cálculos no sean tan tediosos.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} * (4 + 4 + 4 + 8 + 8 - 1) = 1$$

Por lo que el valor del determinante es 1.

Por otro lado, al ser el determinante distinto de cero, podemos afirmar que la matriz A tiene inversa.

Demostración

Para que A sea una matriz ortogonal la inversa coincide con la traspuesta, por lo que:

$$Como\ A * A^{-1} = I\ y\ A^{-1} = A^t \rightarrow A * A^t = I$$

Comprobamos la multiplicación:

$$A * A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Operamos los números y las matrices:

$$A * A^t = \frac{1}{9} * \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Con lo que se demuestra que la matriz A es ortogonal.

Resolución de la ecuación matricial

Para despejar X de la ecuación matricial, hay que multiplicar por la inversa de A en ambos lados. **¡No se pueden dividir matrices entre si!**

Definimos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quedando la ecuación matricial de la forma: A*X=B. Y ahora despejamos X:

$$A * X = B \rightarrow A^{-1} * A * X = A^{-1} * B \rightarrow I * X = A^{-1} * B \rightarrow \boldsymbol{X = A^{-1} * B}$$

Operando:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}, \text{ siendo la solución } \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}$$