

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas Aplicadas a las CCSS

Opción B, Problema 2

Julio 2019

Análisis de Funciones

El enunciado

Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{ax^2}{x^2+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Calcula el valor de a para que la función sea continua en todo su dominio.
- Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- Calcula: $\int_{-2}^1 f(x)dx$

Estudio de la continuidad

Se observa que la función es continua en \mathbb{R} .

Se estudia la continuidad en $x=1$ (Punto crítico).

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ debe cumplirse que:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Calculo:

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 3x + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2}{x^2 + 1} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Igualando los límites laterales: $\frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Por ello, para $a=2$ $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Lo que implica que la función es continua para $a=2$.

Estudio de la monotonía

Como $f(x)$ tiene dos ramas estudiamos la monotonía en cada una de ellas.

$$\text{Si } x \leq 1 \rightarrow f_1(x) = x^2 - 3x + 3 \rightarrow f_1'(x) = 2x - 3 \rightarrow 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

La solución de la ecuación no pertenece al dominio, por lo que no la podemos tener en cuenta para el estudio de signos de la derivada.

$$\text{Si } x > 1 \rightarrow f_2(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \rightarrow f_2'(x) = \frac{4x \cdot (x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Igualando a cero la derivada: } \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

En este caso, tampoco pertenece la solución al dominio de la función.

Por lo tanto ambas ramas de la función son monótonas.

Para estudiar la monotonía se dan valores a las derivadas:

$$f_1'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 < 0 \rightarrow f(x) \text{ es decreciente si } x \in (-\infty, 1)$$

$$f_2'(2) = \frac{4 \cdot 2}{(2^2 + 1)^2} = \frac{8}{25} > 0 \rightarrow f(x) \text{ es creciente si } x \in (1, +\infty)$$

Asíntotas

Como $f(x)$ tiene dos ramas estudiamos las asíntotas en cada una de ellas.

Por ser $f_1(x) = x^2 - 3x + 3$ un polinomio, **no presenta asíntotas**.

En cuanto a $f_2(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$, al no anularse su denominador para ningún valor de x que pertenezca a su dominio, **tampoco tiene asíntotas verticales**.

En cuanto a la posible asíntota horizontal, calcularé el límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Por lo tanto, **$y=2$ es Asíntota horizontal de $f(x)$** .

Cálculo de la integral

En el intervalo $[-2,1]$, $f(x)=x^2 - 3x + 3$. Entonces, haremos la integral sólo en el primer tramo de la función.

$$\int_{-2}^1 x^2 - 3x + 3 dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-2}^1 x^2 - 3x + 3 dx = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 * 1^2}{2} + 3 * 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{3 * (-2)^2}{2} + 3 * (-2) \right) = \frac{33}{2}$$

Por lo tanto la solución será:

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \frac{33}{2} = 16'5$$