Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2020

Problema 2
Análisis de una función

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-1, 1\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5}{0^2 - 1} = \frac{5}{-1} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = (0, -5)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x} = \nexists$$

Por ello, la función **no tiene puntos de corte con el eje X.**

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1; $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{10}{0}\longrightarrow \begin{cases}\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{10}{0^-}=-\infty\\ \lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{10}{0^+}=+\infty\end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x=-1\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

En x=1; $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{4}{0}\longrightarrow \begin{cases}\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\end{cases}, luego\ \boxed{\boldsymbol{x=1\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

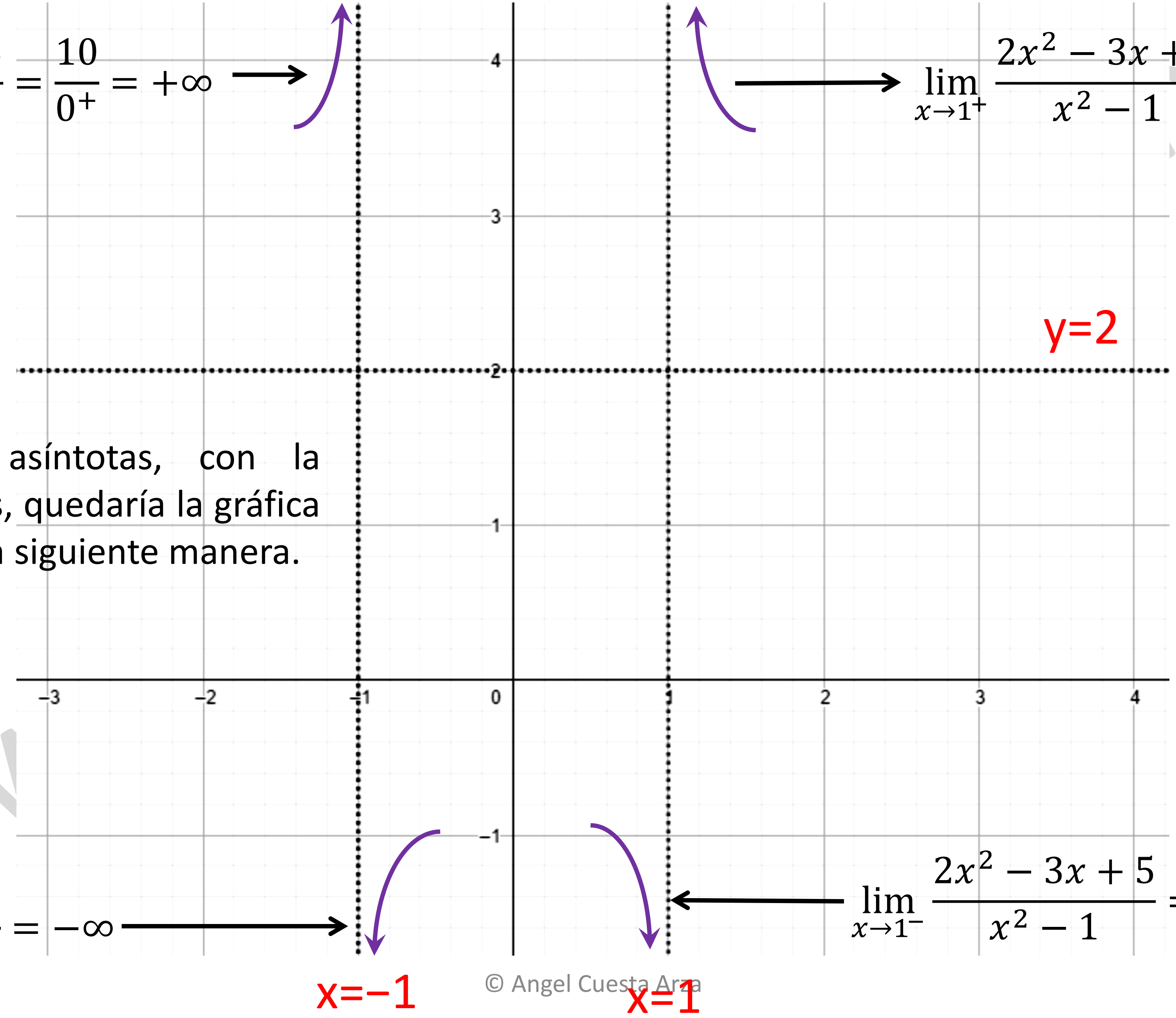
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2, luego\ \boxed{\boldsymbol{y=2\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{10}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{10}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3x+5}{x^2-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

Estudio de la monotonía

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(4x-3)\cdot(x^2-1) - (2x^2-3x+5)\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-14x+3}{(x^2-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^2-14x+3}{(x^2-1)^2} = 0 \longrightarrow 3x^2 - 14x + 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+2\sqrt{10}}{3} \approx 4'44 \\ x_2 = \dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} \approx 0'23 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ a -1	-1 a $\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$	$\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$ a 1	1 a $\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$	$\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$ a $+\infty$
f'(x)	+	+	−	−	+
f(x)	↗	↗	↘	↘	↗

f(x) es **creciente** en $x\epsilon(-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3},+\infty\right)$ y **decreciente** en $x\epsilon\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3},1\right) \cup \left(1,\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$.

Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

$-\infty \qquad -1 \qquad \dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} \qquad 1 \qquad \dfrac{7+2\sqrt{10}}{3} \qquad +\infty$

f'(x)	+	+	−	−	+
f(x)	↗	↗	↘	↘	↗

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo y un máximo relativo.

Mínimo: $\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, f\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)\right) = \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, 1'66\right) \cong \mathbf{(4'44, 1'66)}$

Máximo: $\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, f\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right)\right) = \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, -4'66\right) \cong \mathbf{(0'225, -4'66)}$

Representación Gráfica