# Selectividad Comunidad Valenciana

## Matemáticas CC.SS

## Julio 2020



## Problema 5

## Optimización de una función cuadrática

# El enunciado

Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades.
La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55$$

donde $x$ es el precio de venta de una caja. Se pide:

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

Solución:

El beneficio obtenido al vender cada caja a 6€ se obtiene sustituyendo x por 6 en la función del beneficio.

$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$ **El beneficio mensual será de 5€ por cada caja venida a 6€.**

# Resolución

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios? $B(x) = -x^2 + 16x - 55$

Para obtener beneficios, $B(x) > 0$ $\quad -x^2 + 16x - 55 > 0$

Se calculan los ceros de la función cuadrática. $-x^2 + 16x - 55 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 11 \end{cases}$

Se estudia el signo de la función:

| x | 0 | 5 | 11 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| B(x) | $-$ | $+$ | $-$ | |

$B(1) = -1^2 + 16 \cdot 1 - 55 < 0$

$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 > 0$

$B(12) = -12^2 + 16 \cdot 12 - 55 < 0$

Es decir, la función B(x) es positiva cuando x está comprendida entre 5 y 11.

**El beneficio mensual será positivo cuando el precio de la caja esté comprendido entre 5 y 11 euros.**

# Resolución

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$B(x) = -x^2 + 16x - 55$ Siendo: a=−1; b=16; c=−55

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-16}{2 \cdot (-1)} = 8$$

**Para que el beneficio sea máximo, debe vender la caja a 8€**

Para calcular el beneficio máximo se sustituye en la función beneficio x=8

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$$

**Si la caja se vende a 8€, el beneficio mensual será de 9€.**

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas.

$$B'(x) = -2x + 16 \longrightarrow -2x + 16 = 0 \longrightarrow x = 8$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en x=8

$$B''(x) = -2 \longrightarrow B''(8) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en x=8 hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente.

# Resolución

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

Para analizar la monotonía, podemos decir que al ser una parábola invertida, será creciente desde 0 hasta el vértice (x=8) y decreciente desde x=8 hasta el infinito.

Lo demostraremos mediante el análisis de signo de la primera derivada, ya que es lo que se exige en un examen de selectividad. Pero si este ejercicio estuviera en una prueba de acceso a un ciclo superior, bastaría dar la respuesta anterior.

| $x$ | $0$ — $8$ | $8$ — $+\infty$ |
|---|---|---|
| $B(x)$ | ↗ | ↘ |
| $B'(x)$ | $+$ | $-$ |

El beneficio crece en el intervalo (0,8) y decrece en el intervalo (8, $+\infty$).