

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 1

Problema de programación lineal

Planteamiento

Para fertilizar una parcela de cultivo se utilizan dos tipos de fertilizantes, A y B. El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno y 110 kilos de fósforo. El fertilizante A contiene un 25% de nitrógeno y un 15% de fósforo, siendo su precio de 1,2 euros el kilo, mientras que el fertilizante B contiene un 16% de nitrógeno y un 40% de fósforo y cuesta 1,6 euros el kilo.

- a) ¿Qué cantidad se necesita de cada tipo de fertilizante para que el coste de la fertilización resulte mínimo?
b) ¿Cuál es este coste mínimo?

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas del problema.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

x =cantidad en kg de fertilizante A.
 y =cantidad en kg de fertilizante B.

	Kg de fertilizante	% de Nitrógeno	% de Fósforo	Coste del Kg
A	x	25%	15%	1'2€
B	y	16%	40%	1'6€

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

$$\begin{array}{lll} \text{"El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 120 kilos de nitrógeno"} & \longrightarrow & 0'25x + 0'16y \geq 120 \\ \text{"El cultivo de la parcela necesita un mínimo de 110 kilos de fósforo"} & \longrightarrow & 0'15x + 0'40y \geq 110 \\ \text{"restricciones triviales"} & \longrightarrow & x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

La función objetivo está definida por el coste: $z = 1'2x + 1'6y$

Planteamiento

Quedando el planteamiento definitivo así:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } z=1'2x+1'6y \\ \text{s. a. } \begin{cases} 0'25x + 0'16y \geq 120 \\ 0'15x + 0'40y \geq 110 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

En primer lugar hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

(a) $0'25x + 0'16y \geq 120$

Expreso la recta: $0'25x + 0'16y = 120$

Se dan valores para representar:

x	y
0	750
480	0

Compruebo si el (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$0'25 \cdot 0 + 0'16 \cdot 0 \geq 120 \rightarrow \text{No Cumple}$$

(b) $0'15x + 0'40y \geq 110$

Expreso la recta: $0'15x + 0'40y = 110$

Se dan valores para representar:

x	y
0	275
2200/3	0

Compruebo si el (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$0'15 \cdot 0 + 0'40 \cdot 0 \geq 110 \rightarrow \text{No Cumple}$$

Resolución del problema

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$\text{s. a. } \begin{cases} 0'25x + 0'16y \geq 120 \\ 0'15x + 0'40y \geq 110 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

x	y
0	750
480	0

x	y
0	275
733	0

Debemos calcular **el vértice C**, puesto que los otros ya los tenemos de los cálculos previos. **B=(0,750)** y **D=(2200/3,0)**.



Resolución del problema

Para calcular el vértice C, se debe resolver el sistema de ecuaciones formado por las rectas que se cortan.

$$\begin{cases} 0'25x + 0'16y = 120 \\ 0'15x + 0'40y = 110 \end{cases}$$

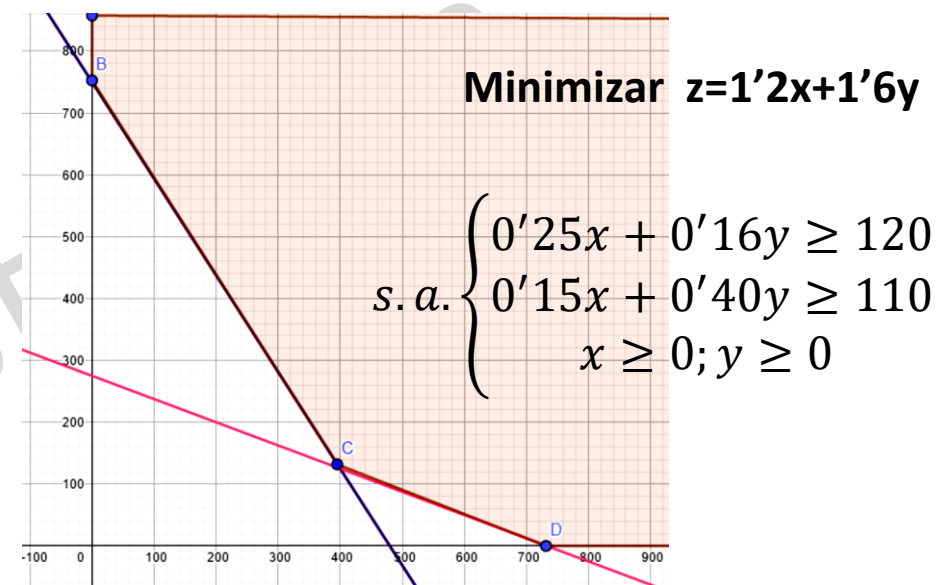
Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 0'16 \\ 110 & 0'40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0'25 & 0'16 \\ 0'15 & 0'40 \end{vmatrix}} = \frac{30'4}{0'076} = 400 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0'25 & 120 \\ 0'15 & 110 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0'25 & 0'16 \\ 0'15 & 0'40 \end{vmatrix}} = \frac{9'5}{0'076} = 125$$

Siendo el vértice **C=(400,125)**.

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z=1'2x+1'6y$
0	750	$1'2 \cdot 0 + 1'6 \cdot 750 = 1200$
400	125	$1'2 \cdot 400 + 1'6 \cdot 125 = 680$ (Mínimo)
$2200/3$	0	$1'2 \cdot 2200/3 + 1'6 \cdot 0 = 880$



Solución

Solución: Para que el coste de la fertilización resulte mínimo se necesitan **400 kg del fertilizante A y 125 kg del B**. Con esta fertilización **el coste será mínimo, y será de 680€**.

x	y	$z=40x+35y$
0	750	$1'2 \cdot 0 + 1'6 \cdot 750 = 1200$
400	125	$1'2 \cdot 400 + 1'6 \cdot 125 = 680$ (Mínimo)
$2200/3$	0	$1'2 \cdot 2200/3 + 1'6 \cdot 0 = 880$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 2

Análisis de una función

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es: } \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 5}{0^2 - 1} = \frac{5}{-1} \rightarrow \boxed{A = (0, -5)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x + 5 = 0 \rightarrow x = \nexists$$

Por ello, la función **no tiene puntos de corte con el eje X.**

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x=-1; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x=1; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

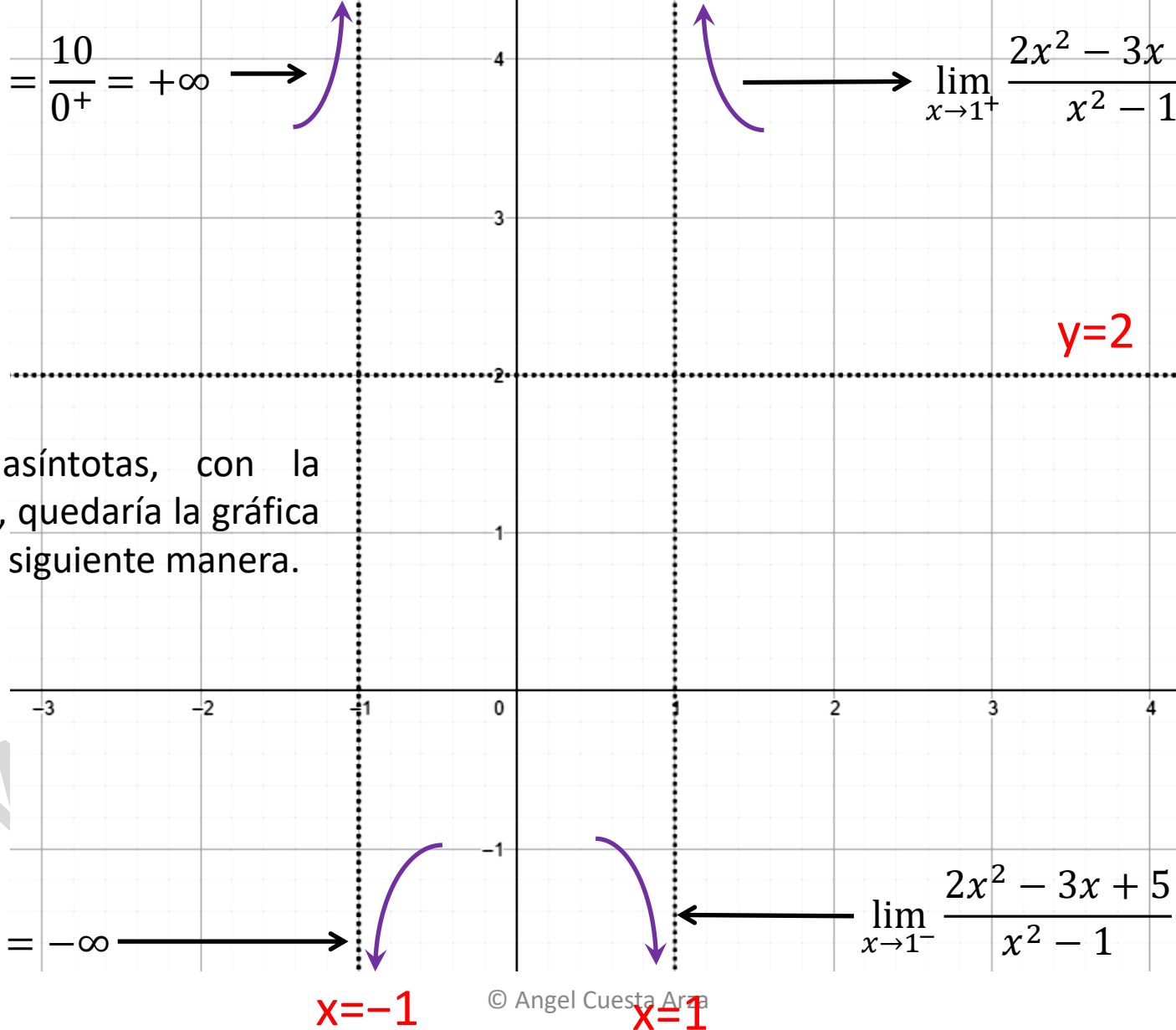
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2, \text{ luego } \boxed{y = 2 \text{ es A.H. de } f(x)}$$

Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^+} = +\infty \rightarrow$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$



Estudio de la monotonía

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (x^2 - 1) - (2x^2 - 3x + 5) \cdot (2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^2 - 1}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 14x + 3}{(x^2 - 1)^2} = 0 \longrightarrow 3x^2 - 14x + 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7 + 2\sqrt{10}}{3} \approx 4'44 \\ x_2 = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3} \approx 0'23 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-1	$\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$	1	$\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-	+
$f(x)$						

$f(x)$ es **creciente** en $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right) \cup \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, +\infty\right)$ y **decreciente** en $x \in \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)$.

Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

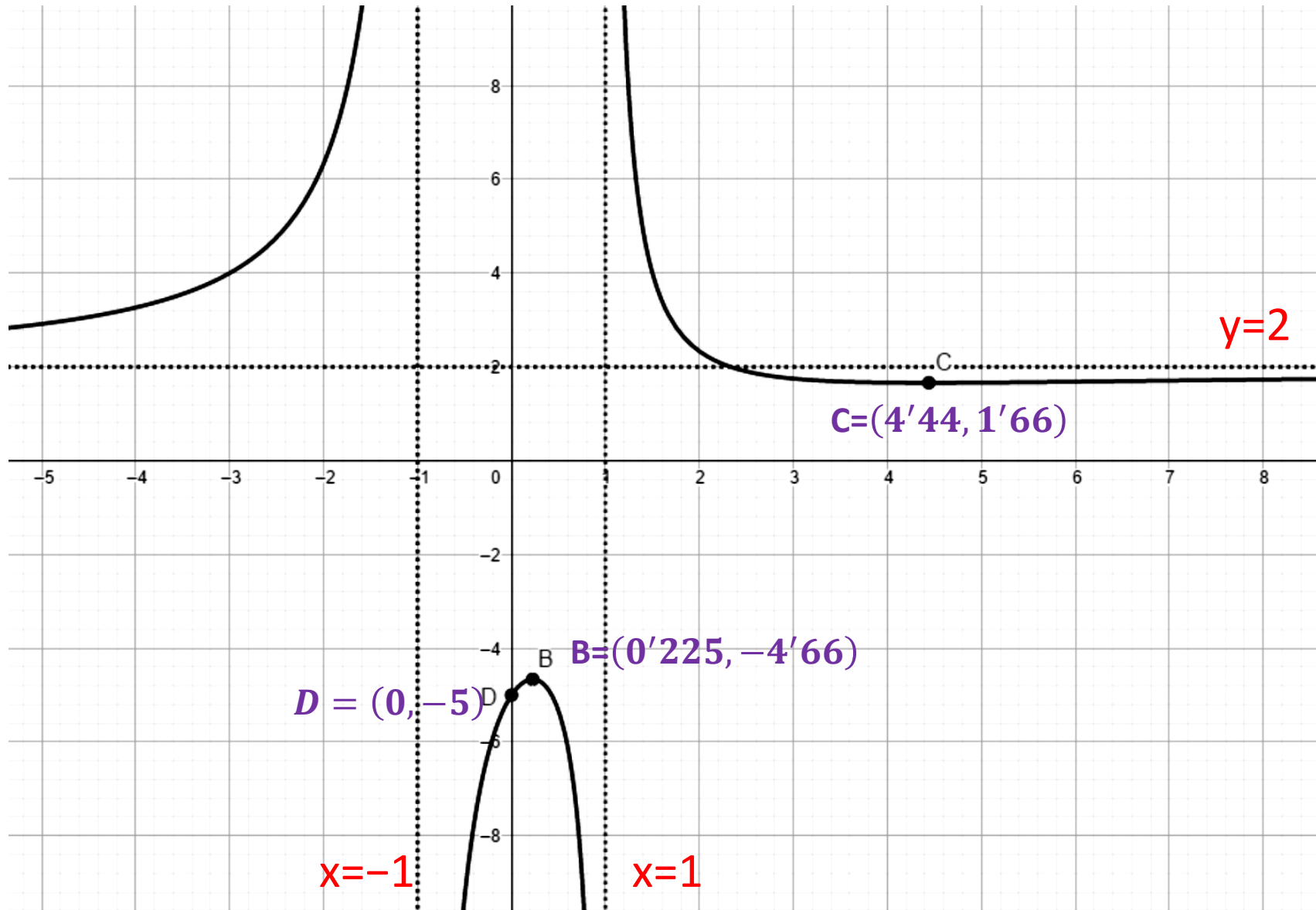
	$-\infty$	-1	$\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$	1	$\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	-	-	+
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo y un máximo relativo.

Mínimo: $\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, f\left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}\right)\right) = \left(\frac{7+2\sqrt{10}}{3}, 1'66\right) \cong (4'44, 1'66)$

Máximo: $\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, f\left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}\right)\right) = \left(\frac{7-2\sqrt{10}}{3}, -4'66\right) \cong (0'225, -4'66)$

Representación Gráfica



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 3
Probabilidad

El enunciado

Si un habitante de la ciudad de Megalópolis es portador del anticuerpo A, entonces 2 veces de cada 5 es portador del anticuerpo B. Por el contrario, si no es portador del anticuerpo A, entonces 4 veces de cada 5 no es portador del anticuerpo B. Si sabemos que la mitad de la población es portadora del anticuerpo A, calcula:

- a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.
- b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.
- c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.
- d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Solución:

Primero asignamos una letra a cada suceso.

A = el habitante es portador del anticuerpo A

B = el habitante es portador del anticuerpo B

Tomamos datos del enunciado.

“si un habitante es portador de A, entonces 2 de cada 5 veces es portador del B” → $P(B/A) = 2/5$

“si un habitante no es portador de A, entonces 4 de cada 5 veces no es portador del B” → $P(\bar{B} / \bar{A}) = 4/5$

“la mitad de la población es portadora de A” → $P(A) = 0'50$

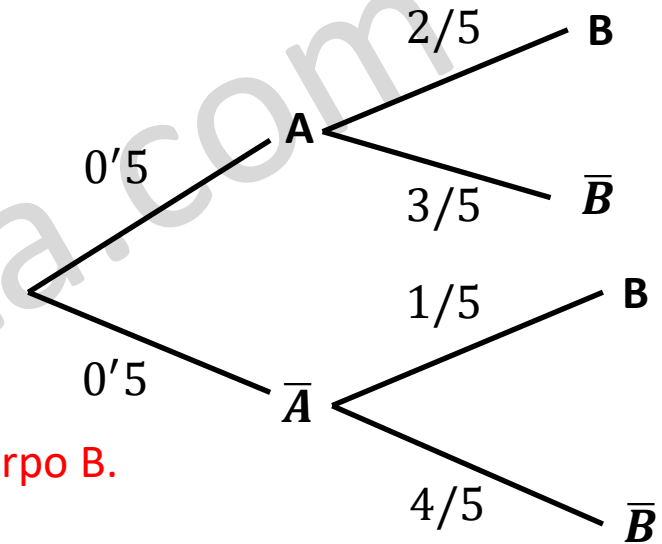
A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.

Resolviendo el problema

“la mitad de la población es portadora de A” $\rightarrow P(A) = 0'50$

“si un habitante es portador de A, entonces 2 de cada 5 veces es portador del B” $\rightarrow P(B/A) = 2/5$

“si un habitante no es portador de A, entonces 4 de cada 5 veces no es portador del B” $\rightarrow P(\bar{B}/\bar{A}) = 4/5$



a) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B.

Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) = 0'5 \cdot \frac{2}{5} + 0'5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo B es **3/10**.

b) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(B)} = \frac{0'5 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis es portador del anticuerpo B lo sea también del anticuerpo A es **2/3**.

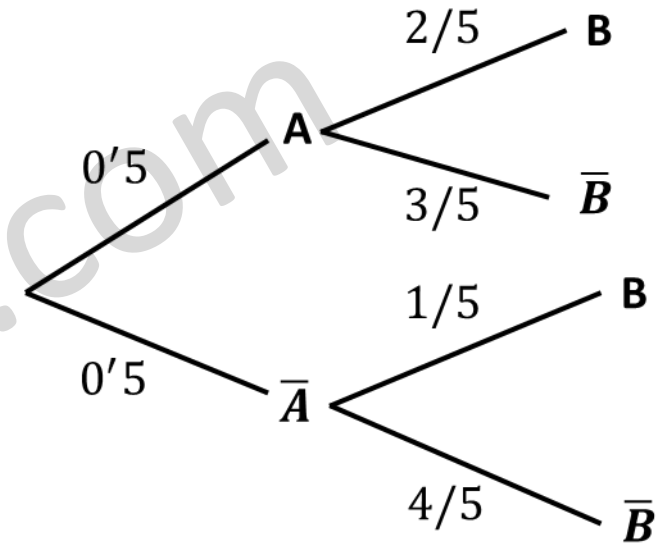
Resolviendo el problema

c) La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(\bar{A} / \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B} / \bar{A})}{1 - P(B)} = \frac{0'5 \cdot \frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{4}{7}$$

La probabilidad de que si un habitante de Megalópolis no es portador del anticuerpo B, tampoco lo sea del anticuerpo A es **4/7**.



d) La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B.

Se aplica el principio de multiplicación:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B} / A) = 0'5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

La probabilidad de que un habitante de Megalópolis sea portador del anticuerpo A y no lo sea del anticuerpo B es **3/10**.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 4

Matrices y determinantes

© Angel Cuesta Arza

El enunciado/Matriz inversa

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de A.
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0 \rightarrow$ La matriz tiene inversa

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: $(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Demostración

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de A.
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Calculo el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{La matriz no tiene inversa}$$

Al ser nulo el determinante de B, podemos decir que la matriz no tiene inversa.

Calculo el determinante de la matriz AB, para ello aplico la propiedad del determinante de un producto de matrices.

$$|AB| = |A| \cdot |B| = (-1) \cdot 0 = 0 \rightarrow \text{La matriz AB no tiene inversa}$$

Ecuación matricial

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Halla la matriz inversa de A.
- b) Explica por qué la matriz B no tiene inversa.
- c) Razona por qué la matriz AB no tiene inversa.
- d) Resuelve la ecuación matricial $AB - AX = BA$.

Solución:

Se despeja X de forma algebraica: $AB - AX = BA \longrightarrow AB - BA = AX \longrightarrow A^{-1}(AB - BA) = A^{-1}(AX)$

$B - A^{-1}BA = X$

Se calcula $A^{-1}BA$: $A^{-1}BA = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & -2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula $X = B - A^{-1}BA$:

$$X = B - A^{-1}BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 5

Optimización de una función cuadrática

El enunciado

Una empresa farmacéutica lanza al mercado un nuevo fármaco que se distribuye en cajas de seis unidades. La relación entre el precio de cada caja y el beneficio mensual obtenido en euros viene dada por la función

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55$$

donde x es el precio de venta de una caja. Se pide:

- a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada caja a 6 euros?
- b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?
- c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
- d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

Solución:

El beneficio obtenido al vender cada caja a 6€ se obtiene sustituyendo x por 6 en la función del beneficio.

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = 5$$

El beneficio mensual será de 5€ por cada caja venida a 6€.

Resolución

b) ¿Entre qué valores debe fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55$$

Para obtener beneficios, $B(x) > 0 \quad -x^2 + 16x - 55 > 0$

Se calculan los ceros de la función cuadrática. $-x^2 + 16x - 55 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 11 \end{cases}$

Se estudia el signo de la función:

x	0	5	11	$+\infty$
B(x)		-	+	-

$$B(1) = -1^2 + 16 \cdot 1 - 55 < 0$$

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 > 0$$

$$B(12) = -12^2 + 16 \cdot 12 - 55 < 0$$

Es decir, la función $B(x)$ es positiva cuando x está comprendida entre 5 y 11.

El beneficio mensual será positivo cuando el precio de la caja esté comprendido entre 5 y 11 euros.

Resolución

c) Calcula a qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$$B(x) = -x^2 + 16x - 55 \quad \text{Siendo: } a=-1; b=16; c=-55$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-16}{2 \cdot (-1)} = 8$$

Para que el beneficio sea máximo, debe vender la caja a 8€

Para calcular el beneficio máximo se sustituye en la función beneficio $x=8$

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = 9$$

Si la caja se vende a 8€, el beneficio mensual será de 9€.

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas.

$$B'(x) = -2x + 16 \longrightarrow -2x + 16 = 0 \longrightarrow x = 8$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en $x=8$

$$B''(x) = -2 \longrightarrow B''(8) = -2 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en $x=8$ hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente.

Resolución

d) ¿Entre qué valores el beneficio crece y entre qué valores el beneficio decrece?

Para analizar la monotonía, podemos decir que al ser una parábola invertida, será creciente desde 0 hasta el vértice ($x=8$) y decreciente desde $x=8$ hasta el infinito.

Lo demostraremos mediante el análisis de signo de la primera derivada, ya que es lo que se exige en un examen de selectividad. Pero si este ejercicio estuviera en una prueba de acceso a un ciclo superior, bastaría dar la respuesta anterior.

x	0	8	$+\infty$			
B(x)						
B'(x)	<table><tr><td></td><td>+</td><td>-</td></tr></table>				+	-
	+	-				

El beneficio crece en el intervalo $(0,8)$ y decrece en el intervalo $(8, +\infty)$.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2020



Problema 6
Probabilidad

El enunciado

Un profesor evalúa a sus estudiantes a través de un trabajo final. El profesor sabe por experiencia que el 5% de los trabajos no son originales, sino que son plagios. El profesor dispone de un programa informático para detectar plagios. La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04 y la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02.

- a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.
- b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?
- c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Solución: Primero asignamos una letra a cada suceso.

Tomamos datos del enunciado.

A = el trabajo es original **$\bar{A}$** = el trabajo está plagiado

B = clasifica como original **$\bar{B}$** = clasifica como plagio

“el 5% de los trabajos no son originales” $\rightarrow P(\bar{A}) = 0'05 \longrightarrow P(A) = 0'95$

“La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04” $\rightarrow P(B / \bar{A}) = 0'04$

“la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02” $\rightarrow P(\bar{B}/A)=0'02$

A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.

Diagrama de árbol

“el 5% de los trabajos no son originales” $\rightarrow P(\bar{A}) = 0'05 \longrightarrow P(A) = 0'95$

“La probabilidad de que el programa no clasifique correctamente un trabajo plagiado es 0,04” $\rightarrow P(B / \bar{A}) = 0'04$

“la probabilidad de que clasifique como plagio un trabajo original es 0,02” $\rightarrow P(\bar{B}/A)=0'02$

a) Calcula la probabilidad de que un trabajo final, elegido al azar, sea clasificado como plagio por el programa informático.

Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(\bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}/A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B} / \bar{A}) = 0'95 \cdot 0'02 + 0'05 \cdot 0'96 = 0'067$$

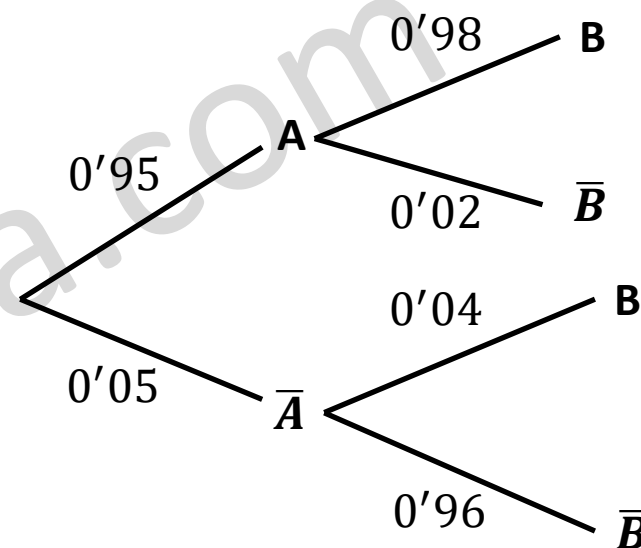
La probabilidad de que un trabajo final sea clasificado como plagio por el programa informático es **0'067**.

b) Un trabajo es inspeccionado por el programa informático y es clasificado como original. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio?

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})}{1 - P(\bar{B})} = \frac{0'05 \cdot 0'04}{1 - 0'067} = 0'002144$$

La probabilidad de que dicho trabajo sea un plagio es **0'002144**.



Resolviendo el problema

c) ¿Qué porcentaje de trabajos finales son plagios y a la vez son clasificados como tales por el programa?

Se aplica el principio de multiplicación:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B} / \bar{A}) = 0'05 \cdot 0'96 = 0'048$$

El porcentaje de trabajos finales que son plagios y son clasificados como tales es del **4'8%**.

