Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2021

Problema 2

Matrices y determinantes

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

El enunciado/Matriz inversa

Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\ y\ \ C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$.
b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $\mathrm{XA}+C=XB$
c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución: Calculo la diferencia entre A y B. Al resultado de dicha operación, le asignaré la matriz D.

$$D=A-B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0 & 3-0 & 4-2\\ 1-1 & 1-1 & 3-1\\ 1-0 & 3-3 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos en la siguiente diapositiva.

Matriz inversa

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+6-0-0-0 = 6 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $\left(Adj(D)\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(D)^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj(D))^t = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

ECUACIÓN MATRICIAL

Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}\ y\ \ C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $\mathrm{XA}+C=XB$

Solución:

Hay que despejar X. Para ello se colocan todos los términos con X en un lado de la ecuación y después se saca factor común.

$$XA-XB=-C\longrightarrow X(A-B)=-C\longrightarrow X(A-B)\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}=-C\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}$$

$$X\cdot I=-C\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}\longrightarrow X=-C\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}$$

Calculo X, puesto que ya dispongo de las dos matrices.

$$X=-\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&-1/3&-2/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}5\cdot0+3\cdot\frac{1}{3}+0\cdot0&5\cdot0+3\cdot\frac{-1}{3}+0\cdot\frac{1}{2}&5\cdot1+3\cdot\frac{-2}{3}+0\cdot0\\2\cdot0+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot0&2\cdot0+1\cdot\frac{-1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}&2\cdot1+1\cdot\frac{-2}{3}+2\cdot0\end{pmatrix}$$

$$X=-\begin{pmatrix}1&-1&3\\1/3&2/3&4/3\end{pmatrix}\longrightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-3}\\\mathbf{-1/3}&\mathbf{-2/3}&\mathbf{-4/3}\end{pmatrix}}$$

PRODUCTO DE MATRICES

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución:

Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. En el caso del producto BC, podemos observar que B tiene 3 columnas y que C tiene dos filas. Eso nos lleva a concluir que B y C no se pueden multiplicar en el orden propuesto inicialmente.

El otro producto propuesto si que puede realizarse, ya que la primera matriz (C) tiene 3 columnas y la segunda matriz (B) también tiene 3 filas. Se realiza el producto.

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 + 3\cdot 1 + 0\cdot 0 & 5\cdot 0 + 3\cdot 1 + 0\cdot 3 & 5\cdot 2 + 3\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{13} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{13} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{pmatrix}}$$