Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2021

Problema 3

Análisis de una función

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

El Enunciado

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-2, 4\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, \frac{9}{2}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \rightarrow x^2 - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{B = (6, 0)} \\ \boldsymbol{C = (-6, 0)} \end{array}}$$

Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−2; $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-32}{0}\longrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-32}{0^-}=+\infty\\ \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-32}{0^+}=-\infty\end{cases}$, *luego* $\boxed{\boldsymbol{x=-2\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

En x=4; $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-20}{0}\longrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-20}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{-3}{0^-}=+\infty\end{cases}$, *luego* $\boxed{\boldsymbol{x=4\ es\ A.V.de\ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

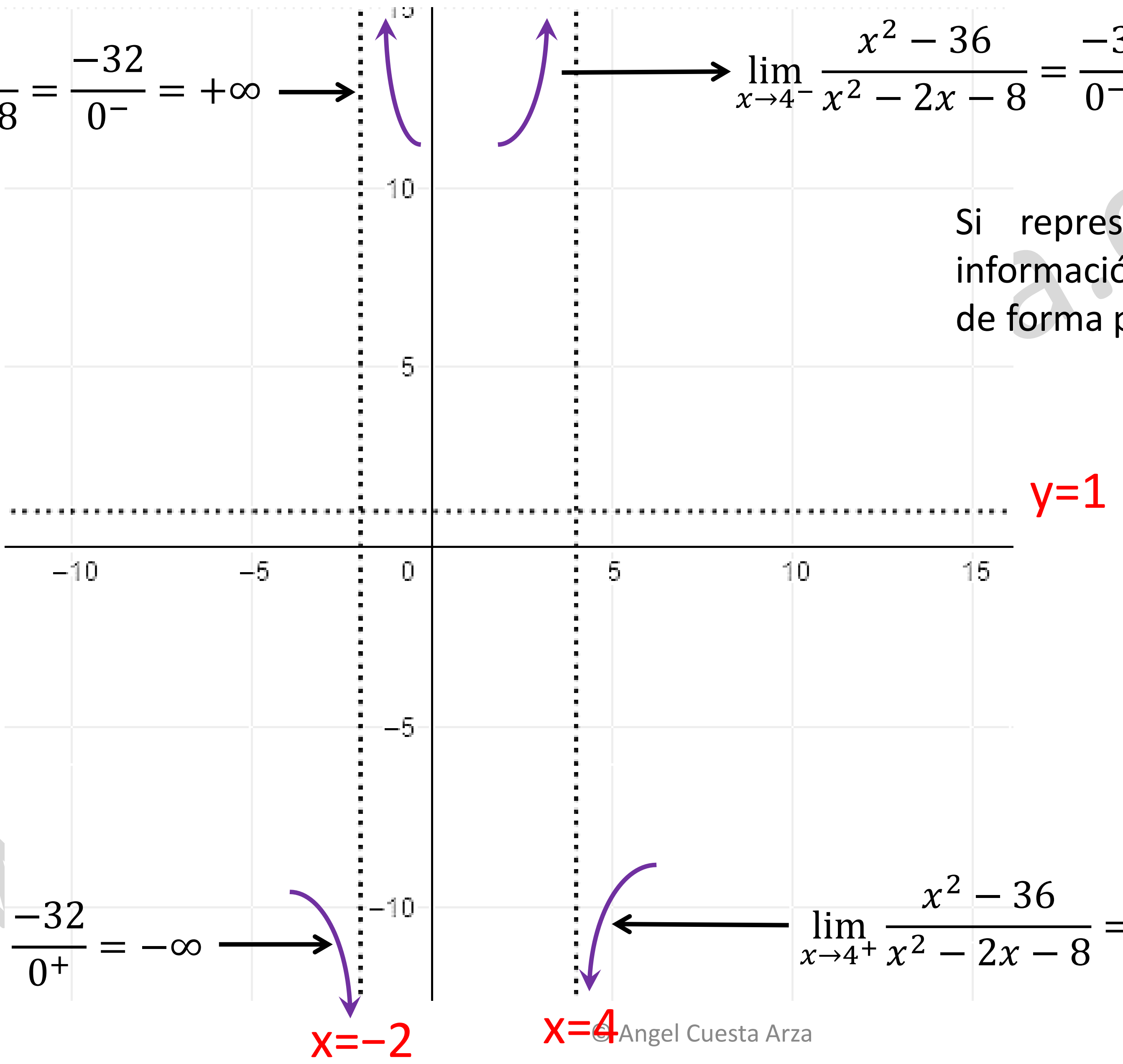
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1, luego\ \boxed{\boldsymbol{y=1\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{-32}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{-32}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \frac{-20}{0^+} = -\infty$$

Estudio de la monotonía

$$f(x)=\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-2x-8)-(x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2}=\frac{-2\cdot(x^2-28x+36)}{(x^2-2x-8)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-2\cdot(x^2-28x+36)}{(x^2-2x-8)^2}=0\longrightarrow x^2-28x+36=0\longrightarrow\begin{cases}x_1=-4\cdot\sqrt{10}+14\approx 1'35\\ x_2=4\cdot\sqrt{10}+14\approx 26'65\end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

$-\infty$ | -2 | $-4\cdot\sqrt{10}+14$ | 4 | $4\cdot\sqrt{10}+14$ | $+\infty$

f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-2)\cup\left(-2,-4\cdot\sqrt{10}+14\right)\cup\left(4\cdot\sqrt{10}+14,+\infty\right)$
y **creciente** en $x\epsilon\left(-4\cdot\sqrt{10}+14,4\right)\cup\left(4,4\cdot\sqrt{10}+14\right)$

Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

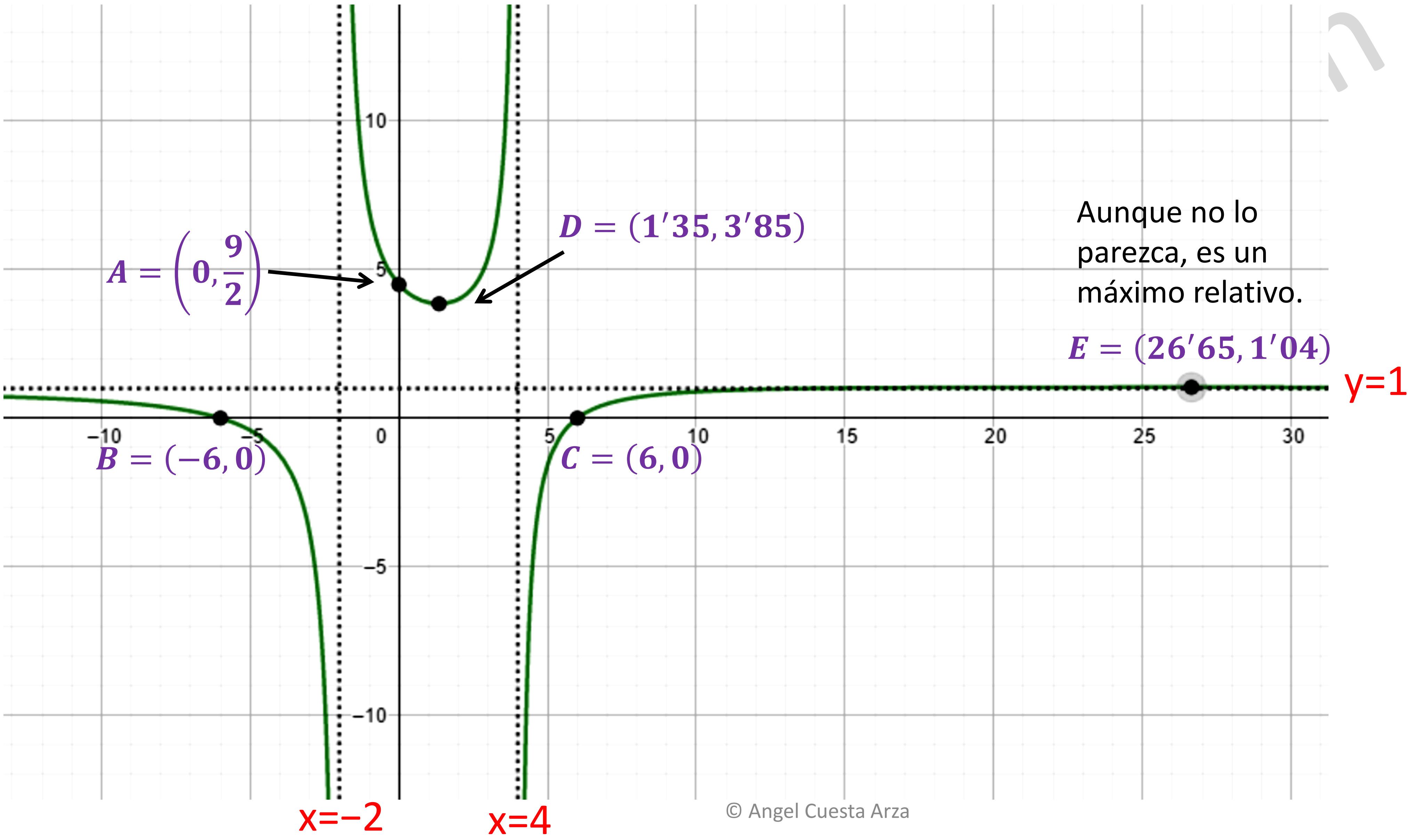
	$-\infty$ — -2	-2 — $-4\cdot\sqrt{10}+14$	$-4\cdot\sqrt{10}+14$ — 4	4 — $4\cdot\sqrt{10}+14$	$4\cdot\sqrt{10}+14$ — $+\infty$
f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

Se observa en el cuadro que la función tiene un **mínimo relativo** en x= $-4\cdot\sqrt{10}+14$
y un **máximo relativo** en x= $4\cdot\sqrt{10}+14$.

Mínimo: $\left(-4\cdot\sqrt{10}+14, f\left(-4\cdot\sqrt{10}+14\right)\right)=\left(-4\cdot\sqrt{10}+14,\dfrac{4\cdot\sqrt{10}+22}{9}\right)\approx(1'35{,}3'85)$

Máximo: $\left(4\cdot\sqrt{10}+14, f\left(4\cdot\sqrt{10}+14\right)\right)=\left(4\cdot\sqrt{10}+14,\dfrac{-4\cdot\sqrt{10}+22}{9}\right)\approx(26'65{,}1'04)$

Representación Gráfica



Aunque no lo parezca, es un máximo relativo.