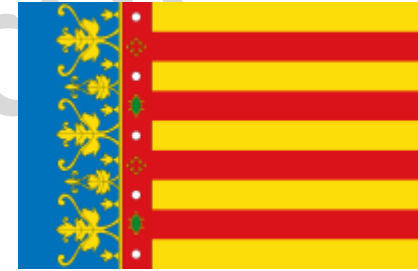


# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



Problema 1

Problema de sistemas de ecuaciones

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



# El Enunciado

Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniano, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

**Solución:** En primer lugar se definen las incógnitas del problema.

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

**x**=kilogramos de café colombiano por paquete.

**y**=kilogramos de café brasileño por paquete.

**z**=kilogramos de café keniano por paquete.

*“la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg”*  $x + y + z = 1$

*“con un coste de 8,50 € el paquete”*

*“El precio de un kilo de cada clase de café es de 10 €, 6 € y 8 €.”*

$$\left. \begin{array}{l} \text{“con un coste de 8,50 € el paquete”} \\ \text{“El precio de un kilo de cada clase de café es de 10 €, 6 € y 8 €.”} \end{array} \right\} \longrightarrow 10x + 6y + 8z = 8'5$$

*“la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño”*  $x = 3y \longrightarrow x - 3y = 0$

# Resolución

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8'5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolveré el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8'5 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1'5}{-4} = \mathbf{0'375} \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8'5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-0'5}{-4} = \mathbf{0'125}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8'5 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-4} = \mathbf{0'5}$$

Para terminar el ejercicio, debemos calcular los porcentajes pedidos.

# Resolución

En cada paquete habrá: 0'375 kg de café colombiano, 0'125 kg de café brasileño y 0'5 kg de café keniatá.

Calculo el porcentaje:

$$\%(Café\ colombiano) = \frac{kg\ de\ café\ colombiano}{kg\ café\ del\ paquete} \cdot 100 = \frac{0'375}{1} \cdot 100 = \mathbf{37'5\ \%}$$

$$\%(Café\ brasileño) = \frac{kg\ de\ café\ brasileño}{kg\ café\ del\ paquete} \cdot 100 = \frac{0'125}{1} \cdot 100 = \mathbf{12'5\ \%}$$

$$\%(Café\ keniatá) = \frac{kg\ de\ café\ keniatá}{kg\ café\ del\ paquete} \cdot 100 = \frac{0'5}{1} \cdot 100 = \mathbf{50\ \%}$$

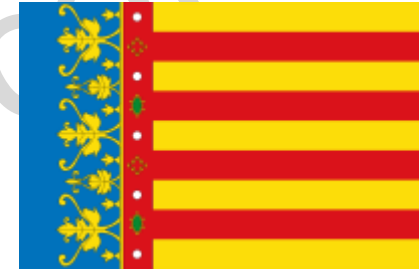
**Solución:** el paquete tendrá un **37'5% de café colombiano**, un **12'5% de café brasileño** y un **50% de café keniatá**.

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



Problema 2

Matrices y determinantes

© Angel Cuesta Arza

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



# El enunciado/Matriz inversa

Consideramos las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcula la inversa de la matriz  $A - B$ .
- b) Calcula la matriz  $X$  de dimensión  $2 \times 3$ , que satisface la ecuación  $XA + C = XB$
- c) ¿Es posible hacer el producto  $BC$ ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto  $CB$ ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

**Solución:** Calculo la diferencia entre A y B. Al resultado de dicha operación, le asignaré la matriz D.

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 & 3-0 & 4-2 \\ 1-1 & 1-1 & 3-1 \\ 1-0 & 3-3 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos en la siguiente diapositiva.

# Matriz inversa

Calculo la matriz inversa por el método de los adjuntos.

1) Determinante:  $|D| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos:  $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta:  $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa:  $(D)^{-1} = \frac{1}{|D|} (Adj(D))^t = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

**Solución:**  $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

# ECUACIÓN MATRICIAL

Consideramos las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz  $X$  de dimensión  $2 \times 3$ , que satisface la ecuación  $XA + C = XB$

**Solución:**

Hay que despejar  $X$ . Para ello se colocan todos los términos con  $X$  en un lado de la ecuación y después se saca factor común.

$$XA - XB = -C \longrightarrow X(A - B) = -C \longrightarrow X(A - B) \cdot (A - B)^{-1} = -C \cdot (A - B)^{-1}$$

$$X \cdot I = -C \cdot (A - B)^{-1} \longrightarrow X = -C \cdot (A - B)^{-1}$$

Calculo  $X$ , puesto que ya dispongo de las dos matrices.

$$X = - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{-1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} & 5 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{-2}{3} + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} & 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{-2}{3} + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$X = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -1/3 & -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}}$$

# PRODUCTO DE MATRICES

Consideramos las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

¿Es posible hacer el producto  $BC$ ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto  $CB$ ? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

**Solución:**

Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. En el caso del producto  $BC$ , podemos observar que  $B$  tiene 3 columnas y que  $C$  tiene dos filas. Eso nos lleva a concluir que  $B$  y  $C$  no se pueden multiplicar en el orden propuesto inicialmente.

El otro producto propuesto si que puede realizarse, ya que la primera matriz ( $C$ ) tiene 3 columnas y la segunda matriz ( $B$ ) también tiene 3 filas. Se realiza el producto.

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



Problema 3

Análisis de una función

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



# El Enunciado

Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$ , se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

## Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es: } \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 4\}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 36}{0^2 - 2 \cdot 0 - 8} = \frac{-36}{-8} = \frac{9}{2} \rightarrow \boxed{A = \left(0, \frac{9}{2}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = 0 \rightarrow x^2 - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \boxed{B = (6, 0)} \\ \boxed{C = (-6, 0)} \end{matrix}$$

# Asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x=-2; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-32}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-32}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-32}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x=4; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-3}{0^-} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 4 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

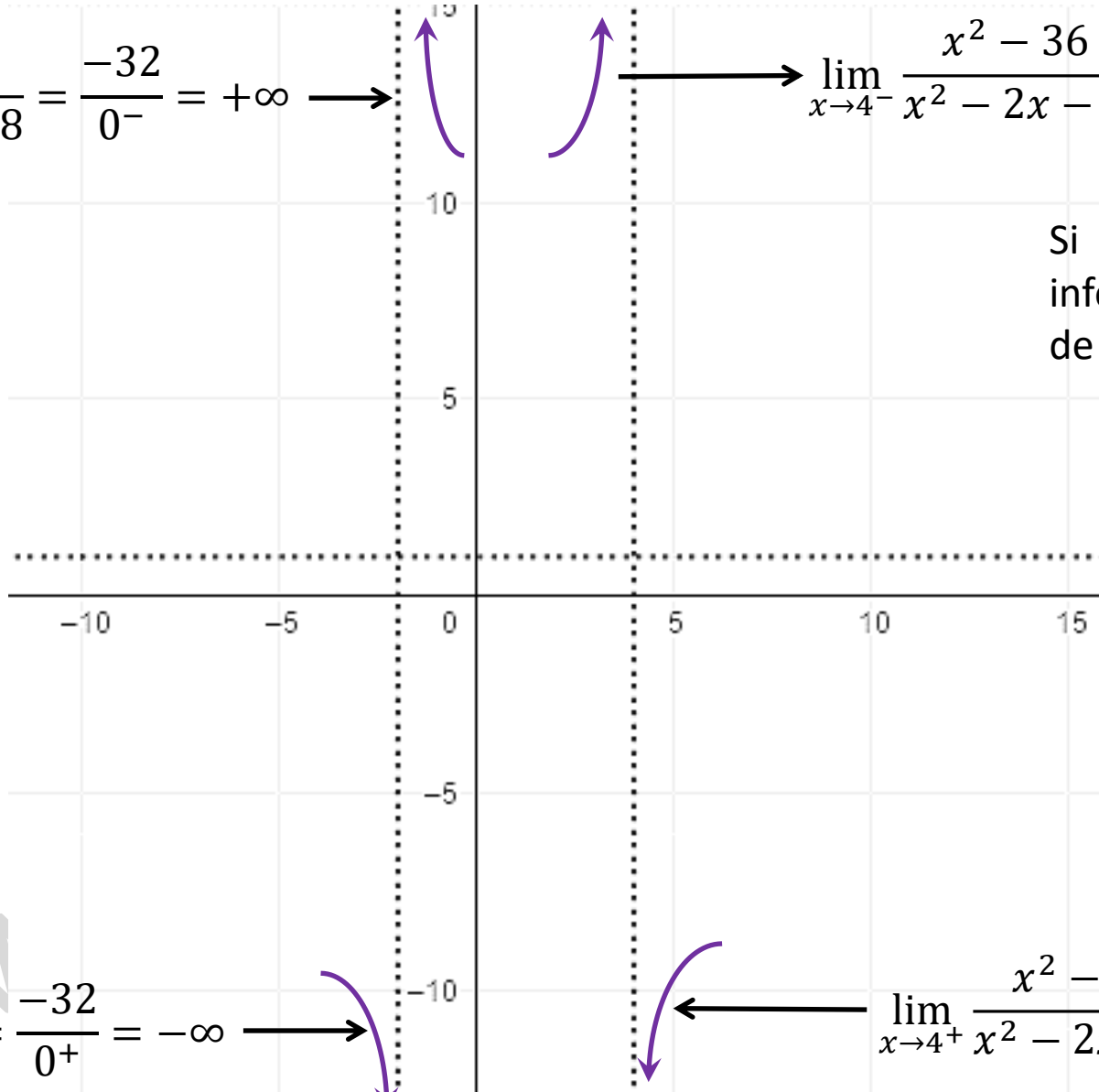
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1, \text{ luego } \boxed{y = 1 \text{ es A.H. de } f(x)}$$

# Esbozo Asíntotas

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-32}{0^-} = +\infty \rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$y=1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-32}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8} = \frac{-20}{0^+} = -\infty$$

$$x=-2$$

$$x=4$$

# Estudio de la monotonía

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2 - 2x - 8) - (x^2 - 36) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-2 \cdot (x^2 - 28x + 36)}{(x^2 - 2x - 8)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-2 \cdot (x^2 - 28x + 36)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = 0 \longrightarrow x^2 - 28x + 36 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \cdot \sqrt{10} + 14 \approx 1'35 \\ x_2 = 4 \cdot \sqrt{10} + 14 \approx 26'65 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada:

|         | $-\infty$                                                                          | $-2$                                                                               | $-4 \cdot \sqrt{10} + 14$                                                            | $4$                                                                                  | $4 \cdot \sqrt{10} + 14$                                                             | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f'(x)$ | $-$                                                                                | $-$                                                                                | $+$                                                                                  | $+$                                                                                  | $-$                                                                                  |           |
| $f(x)$  |  |  |  |  |  |           |

$f(x)$  es **decreciente** en  $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -4 \cdot \sqrt{10} + 14) \cup (4 \cdot \sqrt{10} + 14, +\infty)$   
y **creciente** en  $x \in (-4 \cdot \sqrt{10} + 14, 4) \cup (4, 4 \cdot \sqrt{10} + 14)$

# Máximos y mínimos

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de  $x$  en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

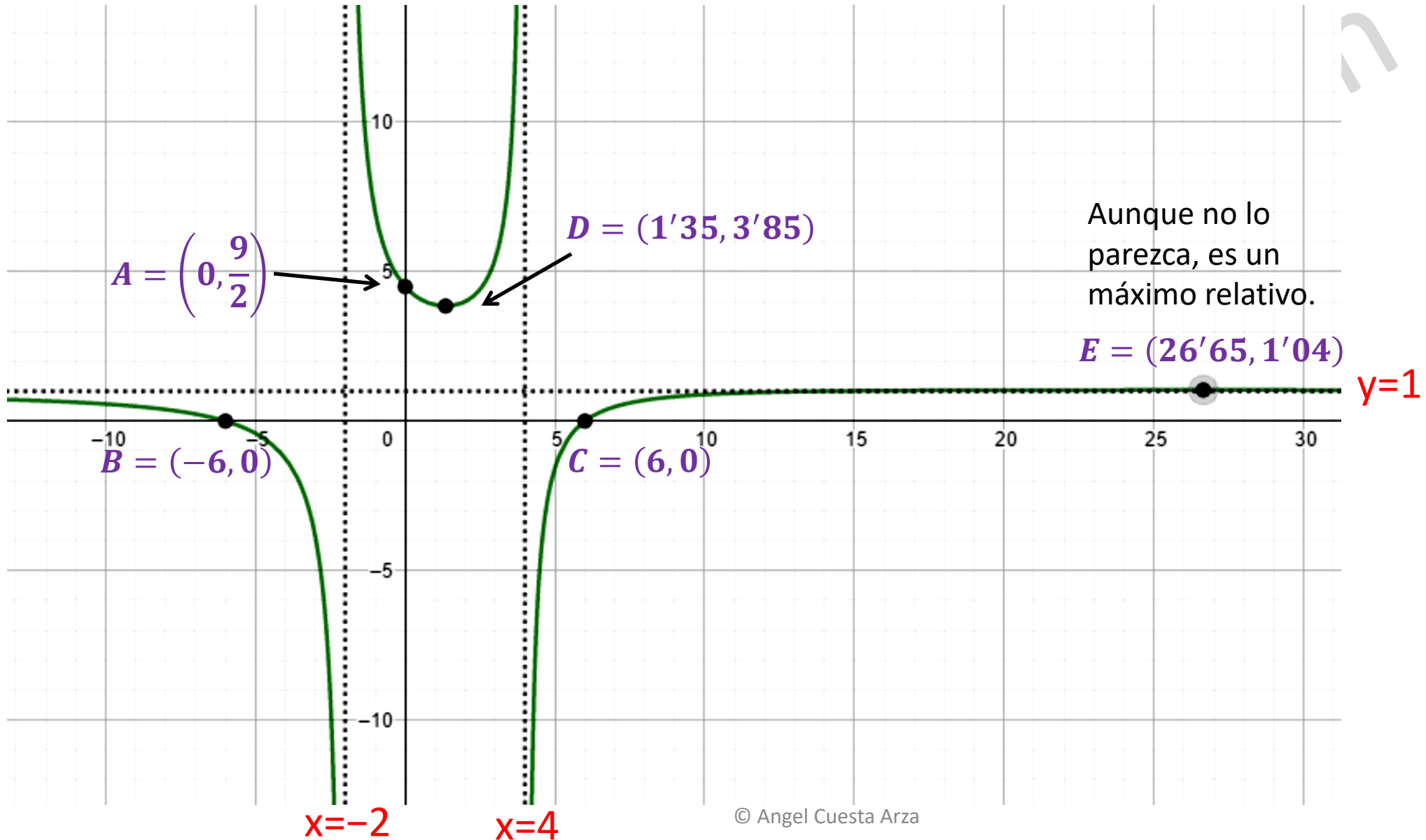
|         | $-\infty$ | $-2$                                                                              | $-4 \cdot \sqrt{10} + 14$                                                          | $4$                                                                                 | $4 \cdot \sqrt{10} + 14$                                                            | $+\infty$                                                                           |
|---------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ |           | $-$                                                                               | $-$                                                                                | $+$                                                                                 | $+$                                                                                 | $-$                                                                                 |
| $f(x)$  |           |  |  |  |  |  |

Se observa en el cuadro que la función tiene un **mínimo relativo** en  $x = -4 \cdot \sqrt{10} + 14$  y un **máximo relativo** en  $x = 4 \cdot \sqrt{10} + 14$ .

**Mínimo:**  $\left(-4 \cdot \sqrt{10} + 14, f(-4 \cdot \sqrt{10} + 14)\right) = \left(-4 \cdot \sqrt{10} + 14, \frac{4 \cdot \sqrt{10} + 22}{9}\right) \approx (1'35,3'85)$

**Máximo:**  $\left(4 \cdot \sqrt{10} + 14, f(4 \cdot \sqrt{10} + 14)\right) = \left(4 \cdot \sqrt{10} + 14, \frac{-4 \cdot \sqrt{10} + 22}{9}\right) \approx (26'65,1'04)$

# Representación Gráfica



# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



## Problema 4

Optimización de una función cuadrática

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



# El enunciado

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de  $x$  unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

$$\text{Ingresos: } I(x) = 4x^2 + 800x$$

$$\text{Gastos: } G(x) = 6x^2 + 460x + 672$$

- a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?
- b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?
- c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

## Solución:

Debemos tener en cuenta que el beneficio se obtiene restándole a los ingresos, los gastos.

$$B(x) = I(x) - G(x) = 4x^2 + 800x - (6x^2 + 460x + 672) = -2x^2 + 340x - 672; \quad x \geq 0$$

El producto es rentable si el beneficio es positivo o cero:  $-2x^2 + 340x - 672 \geq 0$

# Resolución

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

Para resolver la inecuación de segundo grado, se debe resolver en primer lugar la ecuación y después hacer un estudio de signos del polinomio que define dicha inecuación.

$$-2x^2 + 340x - 672 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 168 \end{cases}$$

|      |   |   |     |           |
|------|---|---|-----|-----------|
| x    | 0 | 2 | 168 | $+\infty$ |
| B(x) |   | - | +   | -         |

BENEFICIOS

Para que la empresa sea rentable, debe fabricar **un mínimo de 2 productos y un máximo de 168 productos.**

# Resolución

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672$$

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice.

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672 \quad \text{Siendo: } a=-2; b=340; c=-672$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-340}{2 \cdot (-2)} = 85$$

**Deben fabricar 85 unidades para alcanzar el máximo beneficio.**

Para calcular el beneficio máximo, se sustituye en la función  $x=85$ .

$$B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$$

**El beneficio será de 13778 euros.**

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas.

$$B'(x) = -4x + 340 \longrightarrow -4x + 340 = 0 \longrightarrow x = 85$$

Se calcula ahora la segunda derivada. Se sustituye en  $x=85$

$$B''(x) = -4 \longrightarrow B''(85) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en  $x=85$  hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente.

# Resolución

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Puesto que la función cuadrática decrece a partir del máximo (que está en  $x=85$ ), el máximo beneficio se obtendrá cuando se fabriquen 100 unidades exactamente, ya que a medida que el número de unidades aumenta, el beneficio disminuye.

El beneficio se obtiene sustituyendo  $x=100$  en la función.

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672$$

$$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$$

**El beneficio obtenido al fabricar 100 unidades será de 13328 euros.**

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



Problema 5  
Probabilidad

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PAU Junio 2019

# El enunciado

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

- a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.
- b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.
- c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

## Solución:

Se definen los sucesos:

$B_1$  = "La primera bola extraída es blanca".

$B_2$  = "La segunda bola extraída es blanca".

$A_1$  = "La primera bola extraída es amarilla".

$A_2$  = "La segunda bola extraída es amarilla".

$N_1$  = "La primera bola extraída es negra".

$N_2$  = "La segunda bola extraída es negra".

# Diagrama de árbol

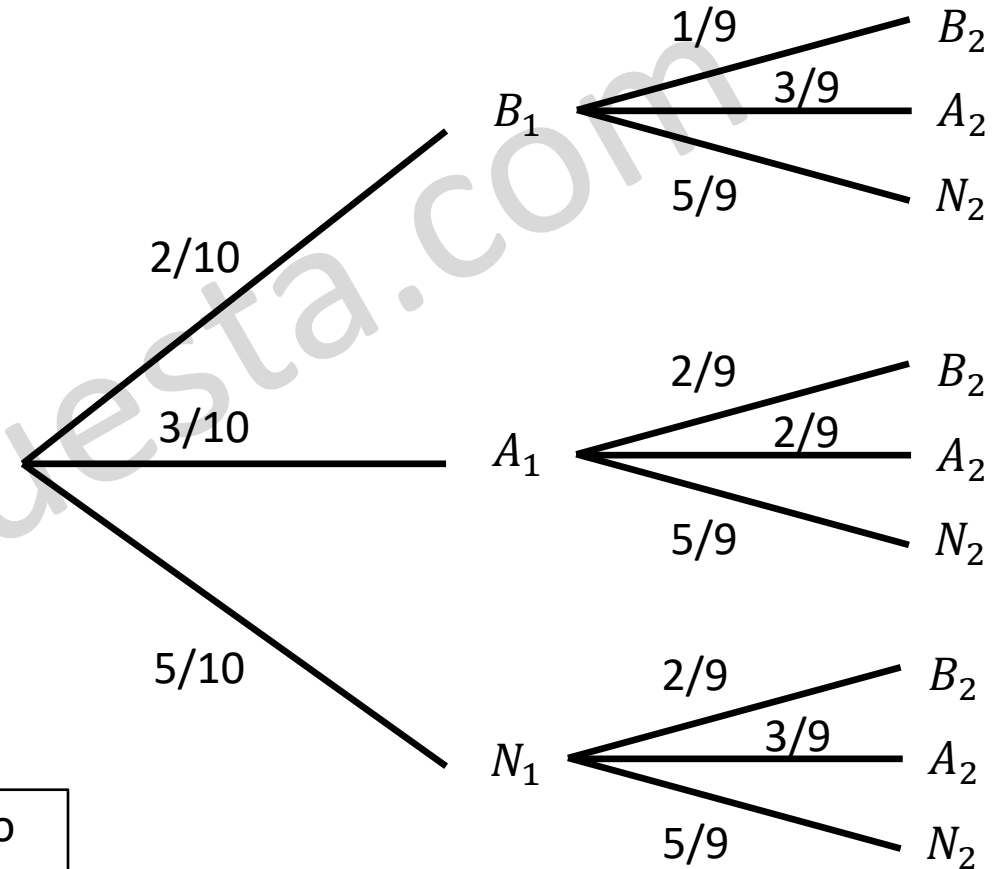
Escribimos el espacio muestral mediante un diagrama de árbol.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

*“El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas”.*

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) + P(A_1 \cap A_2) &= \\ &= P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{45} + \frac{3}{45} = \frac{4}{45} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio es de **4/45**.



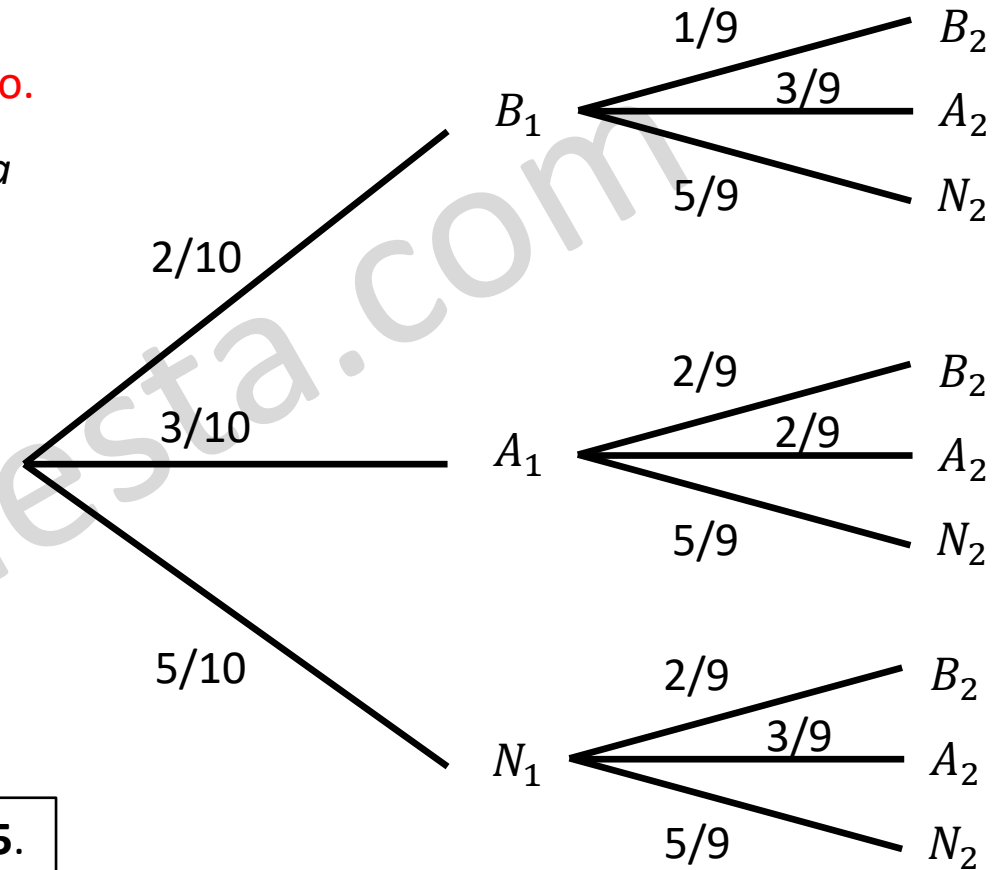
# Resolución

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

*“el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es.”*

$$\begin{aligned} &P(B_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap N_2) + P(A_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \\ &= P(B_1) \cdot P(A_2/B_1) + P(B_1) \cdot P(N_2/B_1) + P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) + \\ &+ P(N_1) \cdot P(B_2/N_1) = \\ &= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

La probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio es **16/45**.



# Resolución

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

$$P(3er\ premio/Premio) = \frac{P(3er\ premio \cap Premio)}{P(Premio)}$$

Se muestran todas las posibilidades en las cuales se gana un premio. Y se calcula su probabilidad.

$$P(Premio) = P[(1er\ o\ 2^o\ premio) \cup 3er\ premio]$$

Puesto que son sucesos incompatibles, puedo escribir:

$$P(Premio) = P(1er\ o\ 2^o\ premio) + P(3er\ premio)$$

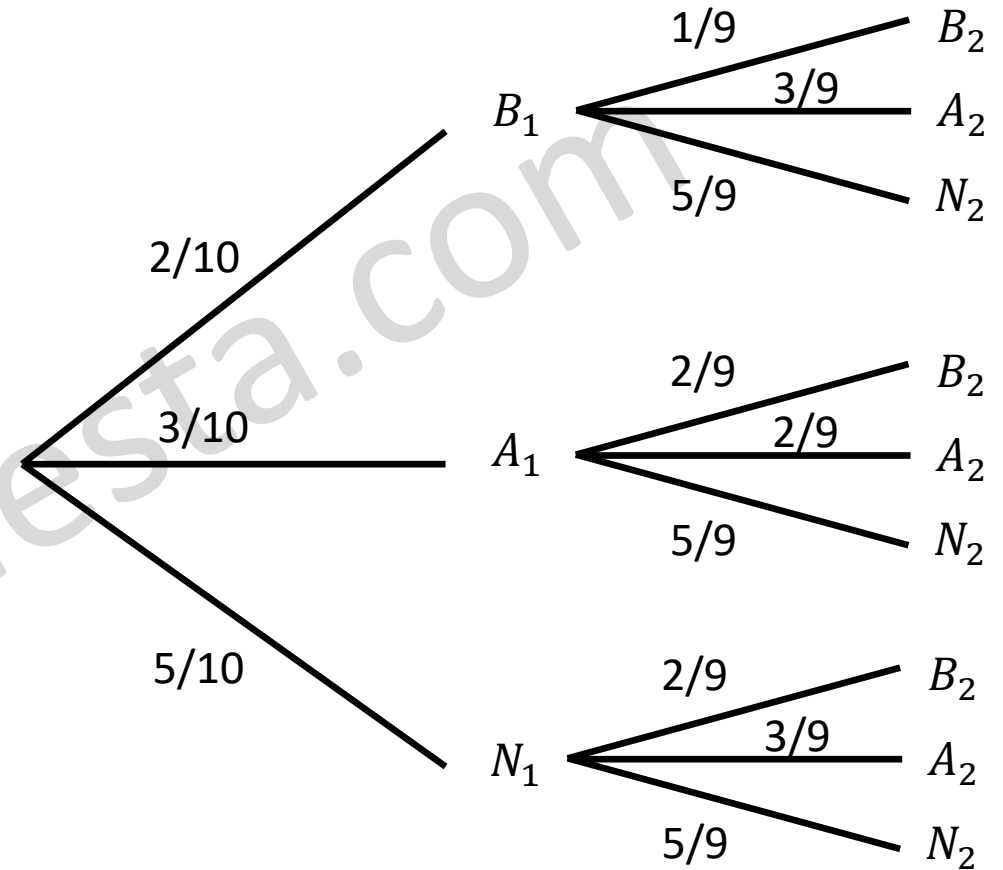
$$P(Premio) = \frac{4}{45} + \frac{16}{45} = \frac{4}{9}$$

Se calcula la probabilidad de la intersección:

$$P(3er\ premio \cap Premio) = P(3er\ premio) = \frac{16}{45}$$

Puesto que no tienen elementos comunes los premios.

$$P(3er\ premio/Premio) = \frac{P(3er\ premio \cap Premio)}{P(Premio)} = \frac{16/45}{4/9} = \frac{4}{5}$$



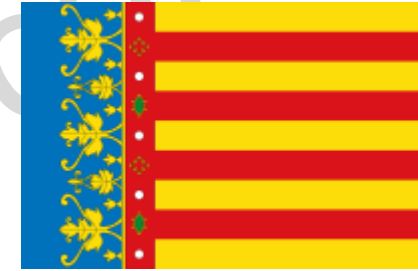
Si el jugador gana un premio, la probabilidad de que sea el tercero es **4/5**.

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2021



Problema 6  
Probabilidad

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PAU Junio 2019

# El enunciado

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

- a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.
- b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.
- c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.
- d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

## Solución:

Primero asignamos una letra a cada suceso.

Tomamos datos del enunciado.

|                                      |                                                            |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| <b>E</b> = el habitante está enfermo | <b><math>\bar{E}</math></b> = el habitante no está enfermo |
| <b>+</b> = el test da positivo       | <b>-</b> = el test da negativo                             |

*“Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población”* →  **$P(E)=0'05$**

*“una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos”* →  **$P(+ / E) = 0'99$**

*“la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%.”* →  **$P(- / \bar{E}) = 0'95$**

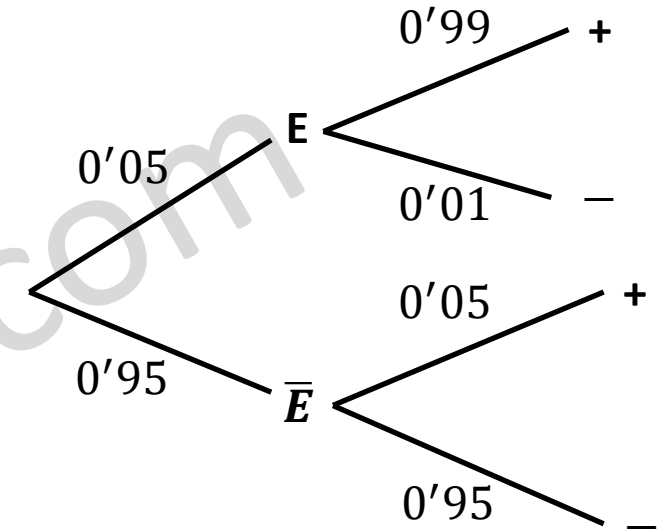
A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.

# Resolviendo el problema

“Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población” →  $P(E)=0'05$

“una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos” →  $P(+ / E) = 0'99$

“la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%.” →  $P(- / \bar{E}) = 0'95$



a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(E / +) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{P(E) \cdot P(+ / E)}{P(E) \cdot P(+ / E) + P(\bar{E}) \cdot P(+ / \bar{E})} = \frac{0'05 \cdot 0'99}{0'05 \cdot 0'99 + 0'95 \cdot 0'05} = 0'5103$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test es **0'5103**.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(\bar{E} / -) = \frac{P(\bar{E} \cap -)}{P(-)} = \frac{P(\bar{E}) \cdot P(- / \bar{E})}{P(E) \cdot P(- / E) + P(\bar{E}) \cdot P(- / \bar{E})} = \frac{0'95 \cdot 0'95}{0'05 \cdot 0'01 + 0'95 \cdot 0'95} = 0'9994$$

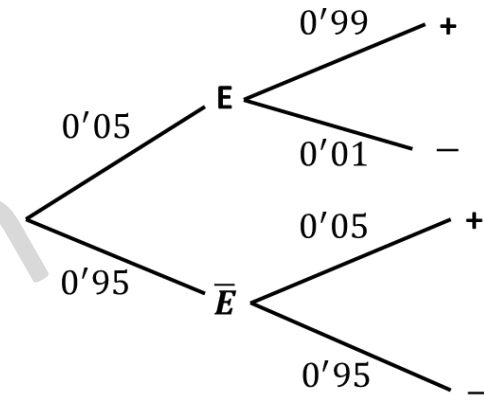
La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test es **0'9994**.

# Resolviendo el problema

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

$$P(E \cap +) + P(\bar{E} \cap -) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\bar{E}) \cdot P(-/\bar{E}) = 0'05 \cdot 0'99 + 0'95 \cdot 0'95 = \mathbf{0'952}$$

La probabilidad de que el test dé el resultado correcto es **0'952**.



d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Rehacemos el diagrama de árbol con el dato que ha cambiado.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(E/+)=\frac{P(E \cap +)}{P(+)}=\frac{P(E) \cdot P(+/E)}{P(E) \cdot P(+/E)+P(\bar{E}) \cdot P(+/\bar{E})}=\frac{0'01 \cdot 0'99}{0'01 \cdot 0'99+0'99 \cdot 0'05}=\mathbf{0'1667}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test es **0'1667**.

