Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2022

Problema 3
Análisis de una función

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En mi página web podrás encontrar muchos ejercicios como este. **angelcuesta.com**

No dejes de revisar mi canal, añado contenido casi diariamente.

Te dejo aquí una pequeña muestra de ejercicios resueltos en años anteriores. Son muy parecidos y vale la pena trabajarlos a fondo.

Junio 2021
Problema 3
PAU Comunidad Valenciana

Julio 2021
Problema 3
PAU Comunidad Valenciana

Problema 3

Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2-x-1=0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \longrightarrow$$ lo cual implica que el Dominio es: $$\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x)=R-\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y\,(x=0)\rightarrow f(0)=\frac{3\cdot 0^2-4\cdot 0-4}{0^2-0-1}=\frac{-4}{-1}=-4\rightarrow \boxed{\boldsymbol{A=(0,4)}}$$

$$Eje\ X\,(y=0)\rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=0\rightarrow \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1}=0\rightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2/3 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix}\boldsymbol{B=(2,0)} \\ \boldsymbol{C=(-2/3,0)}\end{matrix}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$En \quad \boldsymbol{x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \quad \lim_{x\to\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \frac{-0'382}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \dfrac{-0'382}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \dfrac{-0'382}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$$

$$En \quad \boldsymbol{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad \lim_{x\to\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \frac{-2'618}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \dfrac{-2'618}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} \dfrac{3x^2-4x-4}{x^2-x+1} = \dfrac{-2'618}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ es\ A.V.\ de\ f(x)}}$$

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

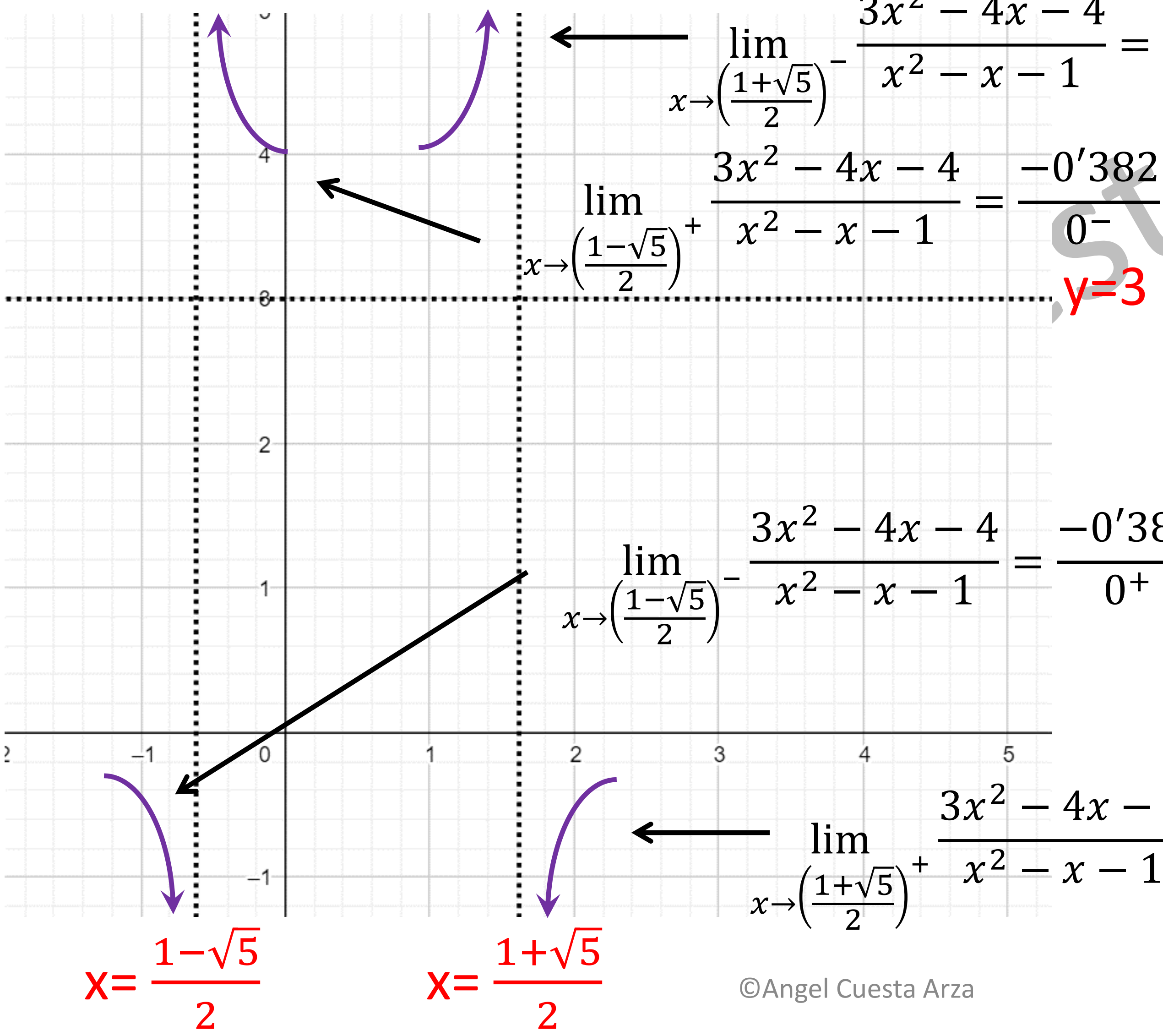
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y = 3\ es\ A.H.\ de\ f(x)}}$$

Problema 3

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{-2'618}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{-0'382}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{-0'382}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} \frac{3x^2-4x-4}{x^2-x-1} = \frac{-2'618}{0^+} = -\infty$$

Problema 3

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(6x-4)\cdot(x^2-x-1) - (3x^2-4x-4)\cdot(2x-1)}{(x^2-x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - (6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x - 8x + 4)}{(x^2-x-1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{x^2+2x}{(x^2-x-1)^2} = 0 \longrightarrow x^2 + 2x = 0 \longrightarrow x\cdot(x+2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ a -2	-2 a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a 0	0 a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $+\infty$
f'(x)	+	−	−	+	+
f(x)	↗	↘	↘	↗	↗

f(x) es **decreciente si:** $\boxed{x\epsilon\left(-2, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)}$

f(x) es **creciente si:** $\boxed{x\epsilon(-\infty,-2) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)}$

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$ a -2	-2 a $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a 0	0 a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $+\infty$
f'(x)	+	−	−	+	+
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Se observa en el cuadro que la función tiene un **máximo relativo en x=−2 y un mínimo relativo en x=0**.

Se sustituyen esos valores en la función para obtener la coordenada y del máximo y del mínimo relativo.

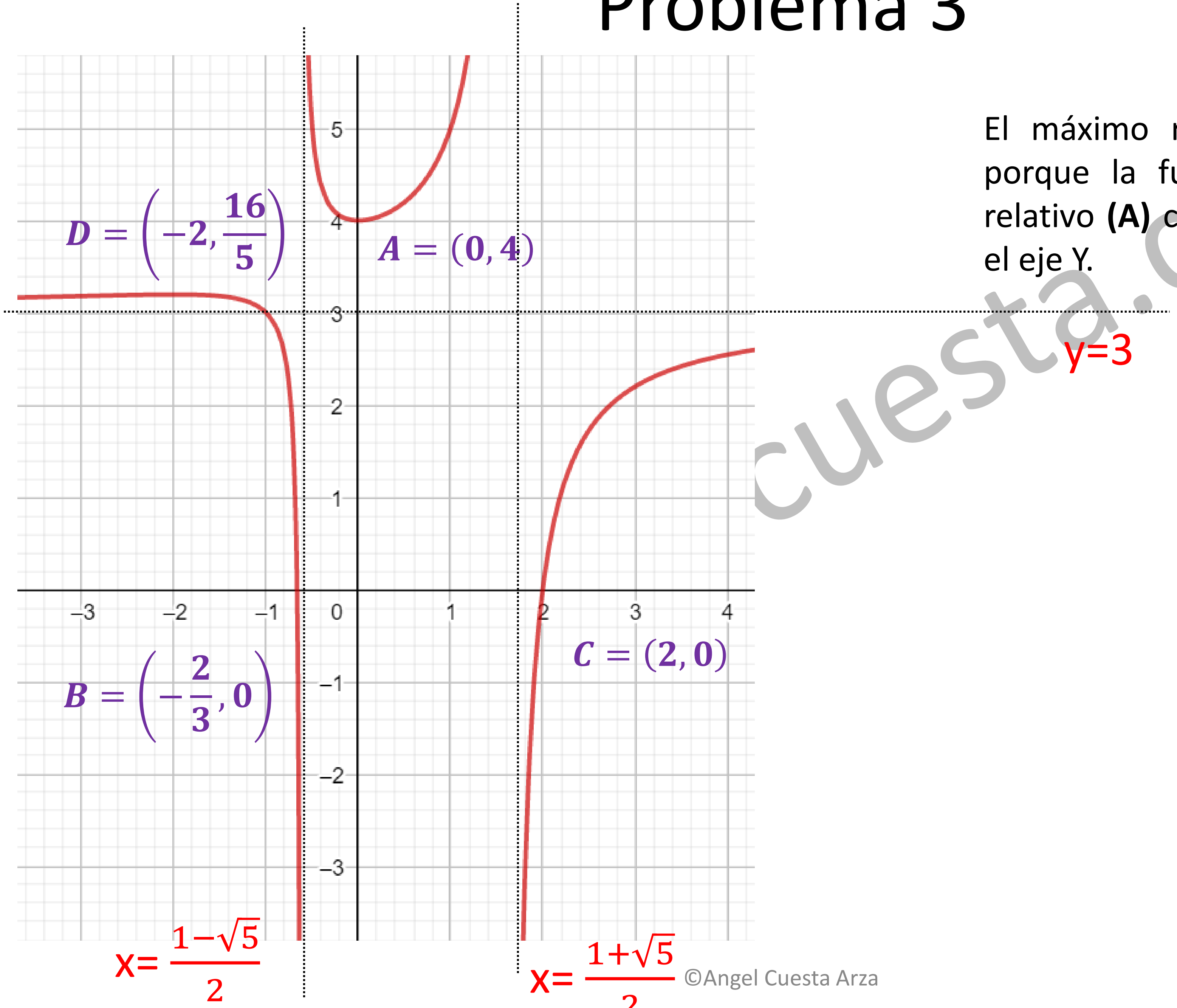
$$f(-2)=\frac{3\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-4}{(-2)^2-(-2)-1}=\frac{16}{5}$$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(\mathbf{-2},\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}\right)}$

$$f(0)=\frac{3\cdot 0^2-4\cdot 0-4}{0^2-0-1}=\frac{-4}{-1}=4$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $\boxed{(\mathbf{0},\mathbf{4})}$

Problema 3



El máximo relativo **(D)** no se ve muy bien porque la función es casi plana. El mínimo relativo **(A)** coincide con el punto de corte con el eje Y.