Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2022

Problema 4
Optimización de una función

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Julio 2021

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

Problema 4

Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra?

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%?

Solución:

Se calcula el rendimiento el primer y el segundo mes. Para ello se sustituye en la función x=1 y x=2.

$$f(1) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3) = 82\ \%$$

$$f(2) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3) = 84'6\ \%$$

El rendimiento de la máquina el primer mes NO es superior al del segundo mes.

Problema 4

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero.

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (15 + 12x - 3x^2) \longrightarrow \frac{1}{10} \cdot (15 + 12x - 3x^2) = 0 \longrightarrow -3x^2 + 12x + 15 = 0$$

Se resuelve la ecuación. $\begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$ Puesto que x está comprendida entre 0 y 12, **sólo es válida la solución x=5**.

Se hace un estudio de signos de la derivada.

	0 — 5	5 — 12
f'(x)	+	−
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$

f(x) presenta un máximo relativo en **x=5**.

Se calcula su valor para x=5.

$$f(5) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = \mathbf{90}\ \%$$

El máximo rendimiento se alcanza a los 5 meses y es del 90%.

Problema 4

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%?

Razonaré utilizando el estudio de signos obtenido anteriormente.

	0 – 5	5 – 12
f’(x)	+	–
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$

Como se puede deducir de dicho estudio, la función crece desde x=0 hasta x=5 y luego decrece desde x=5 hasta x=12.

Se calcula el rendimiento para esos tres meses

$$f(0) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 - 0^3) = 80\ \%$$

$$f(5) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = \mathbf{90}\ \%$$

$$f(12) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 12 + 6 \cdot 12^2 - 12^3) = 11'6\ \%$$

La función parte de un rendimiento del 80% y sube hasta el 90%. Luego disminuye desde el 90% hasta el 11’6%. Por ello podemos decir que **en ningún momento está por debajo del 10%.**