

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



Problema 1

Álgebra matricial

©Ángel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema

angelcuesta.com

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 1

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $C = (-2 \quad -2)$

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a. 1) $B + 2CA$

a. 2) $A - (BC)^T$; siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC .

a. 3) CAB

b) Resuelve la ecuación matricial $\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^T$ siendo C^T la matriz traspuesta de C .

Solución:

Para que dos matrices se puedan sumar deben tener las mismas dimensiones.

Para que dos matrices se pueden multiplicar, el número de columnas de la primera fila debe coincidir con el de filas de la segunda. La matriz resultante tendrá el mismo número de filas que la primera y de columnas que la segunda. Esto se puede expresar mediante la fórmula:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Problema 1

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a. 1) $B + 2CA$

Se calculan las dimensiones de la matriz CA $C_{1 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = D_{1 \times 2}$

Puede comprobarse que las dimensiones de la matriz $B(2 \times 1)$ y de la matriz producto $CA(1 \times 2)$ son diferentes, por lo que **esta operación no puede realizarse**.

a. 2) $A - (BC)^T$; siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC .

Se calculan las dimensiones de la matriz BC $B_{2 \times 1} \cdot C_{1 \times 2} = D_{2 \times 2}$

La matriz traspuesta de BC tiene las mismas dimensiones (2×2) .

Puede comprobarse que las dimensiones de la matriz $A(2 \times 2)$ y de la matriz producto $BC(2 \times 2)$ son iguales, por lo que **esta operación puede realizarse**. Hago el producto y calculo la traspuesta de la matriz resultante.

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-2) & (-4) \cdot (-2) \\ 6 \cdot (-2) & 6 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \longrightarrow (BC)^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Termino la operación pedida.

$$A - (BC)^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 8 & 0 - (-12) \\ 2 - 8 & 4 - (-12) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}}$$

Problema 1

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $C = (-2 \quad -2)$

a) Justifica cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a. 3) CAB

Se calculan las dimensiones de la matriz CA $C_{1 \times 2} \cdot A_{2 \times 2} = D_{1 \times 2}$

Se calculan las dimensiones de la matriz CAB $D_{1 \times 2} \cdot B_{2 \times 1} = E_{1 \times 1}$

Esta operación puede realizarse. La matriz resultante será de dimensiones 1x1, es decir, tendrá un único elemento.

Puede comprobarse que las dimensiones de la matriz A(2x2) y de la matriz producto BC(2x2) son iguales, por lo que **esta operación puede realizarse**. Hago el producto y calculo el la traspuesta de la matriz resultante.

$$C \cdot A = (-2 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = ((-2) \cdot 6 + (-2) \cdot 2 \quad (-2) \cdot 0 + (-2) \cdot 4) = (-16 \quad -8)$$

$$C \cdot A \cdot B = (-16 \quad -8) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = ((-16) \cdot (-4) + (-8) \cdot 6) = \boxed{(16)}$$

Problema 1

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $C = (-2 \quad -2)$

b) Resuelve la ecuación matricial $\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^T$ siendo C^T la matriz traspuesta de C .

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^T \longrightarrow B + AX = 5 \cdot C^T \longrightarrow AX = 5 \cdot C^T - B \longrightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot (5 \cdot C^T - B)$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (5 \cdot C^T - B) \longrightarrow X = A^{-1} \cdot (5 \cdot C^T - B) \quad \text{Calculo la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.}$$

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 0 = 24 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix}$

Problema 1

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $C = (-2 \quad -2)$

b) Resuelve la ecuación matricial $\frac{1}{5} \cdot (B + AX) = C^T$ siendo C^T la matriz traspuesta de C . $X = A^{-1} \cdot (5 \cdot C^T - B)$

Se calcula ahora la matriz $5 \cdot C^T - B$

$$5 \cdot C^T - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Se calcula X

$$X = A^{-1} \cdot (5 \cdot C^T - B) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/12 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot (-6) + 0 \cdot (-16) \\ \frac{-1}{12} \cdot (-6) + \frac{1}{4} \cdot (-16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



Problema 2

Problema de programación lineal

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



Problema 2

Un vendedor dispone de café colombiano y café brasileño, y con ellos realiza mezclas que pone a la venta. Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café, obtiene una mezcla que vende a 15 euros el kilo; si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño, vende la mezcla resultante a 10 euros el kilo. El vendedor dispone de 100 kilos de café colombiano y de 210 kilos de café brasileño. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Halla cuántos kilos de cada mezcla debe producir para obtener el ingreso máximo.

b) ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución: En primer lugar se definen las incógnitas del problema.

x =kilos de mezcla A.

y =kilos de mezcla B.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

“Si mezcla a partes iguales los dos tipos de café...”

Puesto que **x es la cantidad total**, la mitad será de café colombiano ($x/2$) y la otra mitad de café brasileño ($x/2$).

“...si la proporción en la mezcla es de una parte de café colombiano por tres partes de café brasileño...”

Puesto que **y es la cantidad total**, la cuarta será de café colombiano ($y/4$) y resto de café brasileño ($3y/4$).

	kg	kg café colombiano	kg café brasileño	Ingreso por kg
A	x	$x/2$	$x/2$	15
B	y	$y/4$	$3y/4$	10

Problema 2

	kg	kg café colombiano	kg café brasileño	Ingreso
A	x	x/2	x/2	15 €
B	y	y/4	3y/4	10 €

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

$$\begin{aligned}
 \text{"dispone de 100 kilos de café colombiano"} &\longrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 100 \longrightarrow 2x + y \leq 400 \\
 \text{"y de 210 kilos de café brasileño"} &\longrightarrow \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \leq 210 \longrightarrow 2x + 3y \leq 840 \\
 \text{"restricciones triviales"} &\longrightarrow x \geq 0; y \geq 0
 \end{aligned}$$

La función objetivo está definida por el ingreso: $z = 15x + 10y$

En primer lugar hacemos los cálculos para representar gráficamente las inecuaciones.

(a) $2x + y \leq 400$

Expreso la recta: $2x + y = 400$

Se dan valores para representar:

x	y
0	400
200	0

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 400 \rightarrow \text{Si Cumple}$$

(b) $2x + 3y \leq 840$

Expreso la recta: $2x + 3y = 840$

Se dan valores para representar:

x	y
0	280
420	0

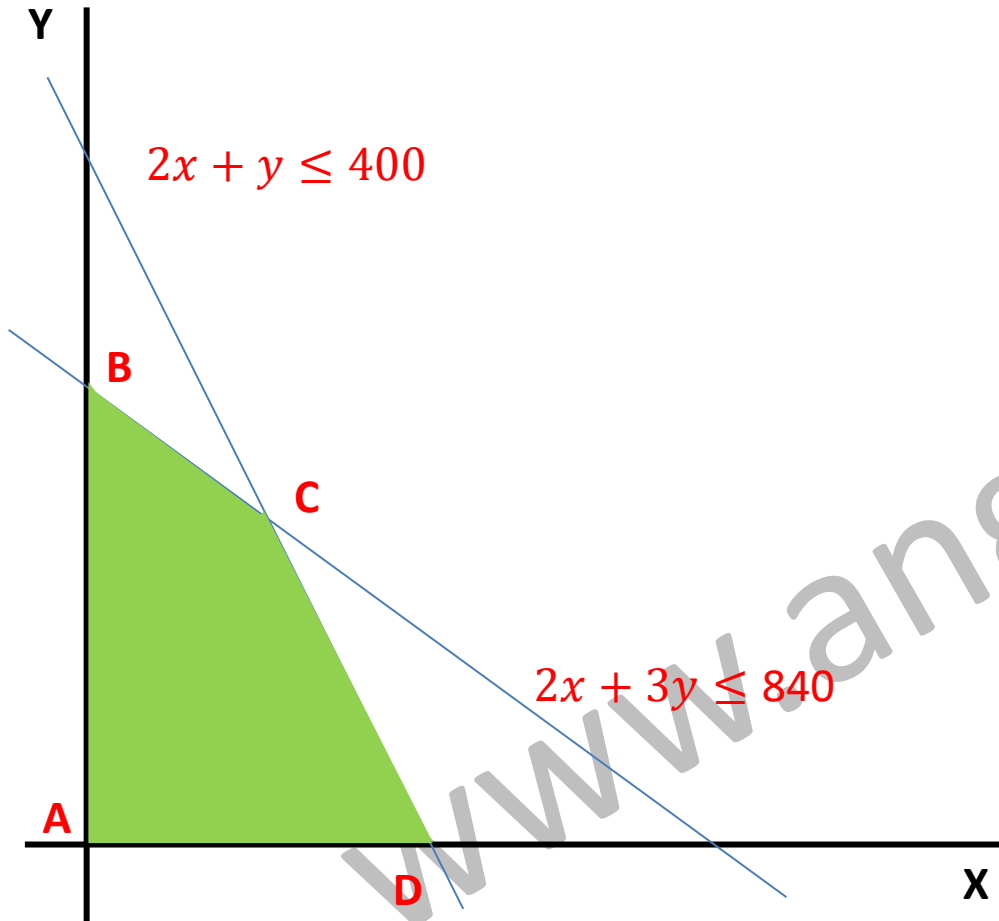
Compruebo si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 840 \rightarrow \text{Si Cumple}$$

Problema 2

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s. a. \begin{cases} 2x + y \leq 400 \\ 2x + 3y \leq 840 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$2x + y = 400$$

x	y
0	400
200	0

$$2x + 3y = 840$$

x	y
0	280
420	0

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 400 \quad (0, 0) \in \{2x + y \leq 400\}$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 840 \quad (0, 0) \in \{2x + 3y \leq 840\}$$

Problema 2

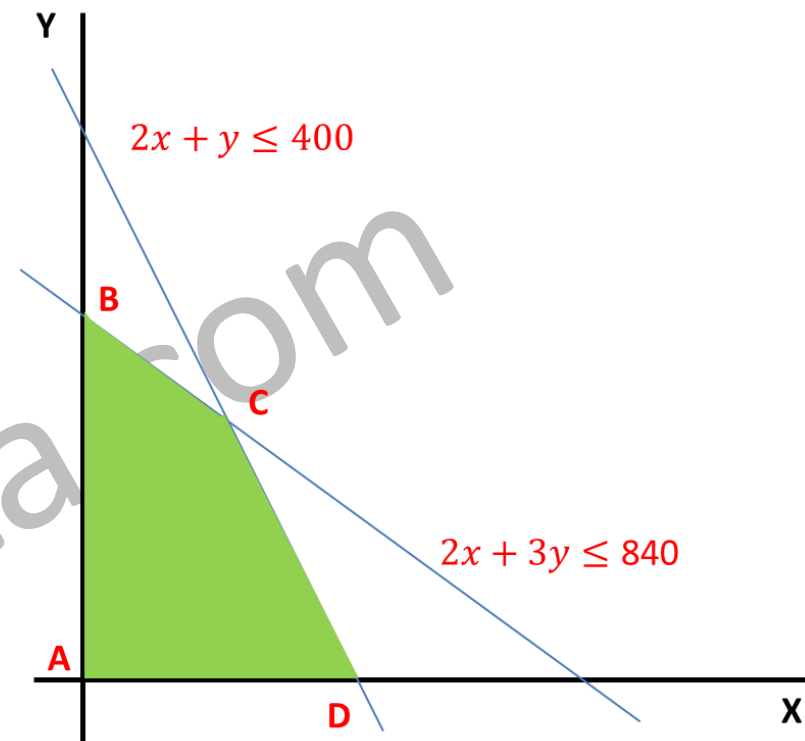
Para calcular el vértice C, se deben resolver el sistema de ecuaciones formado por las rectas que dan lugar a dicho vértice. Los vértices A, B y D, no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas.

Vértice C:
$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 2x + 3y = 840 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 400 & 1 \\ 840 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{360}{4} = 90 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 400 \\ 2 & 840 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{880}{4} = 220$$

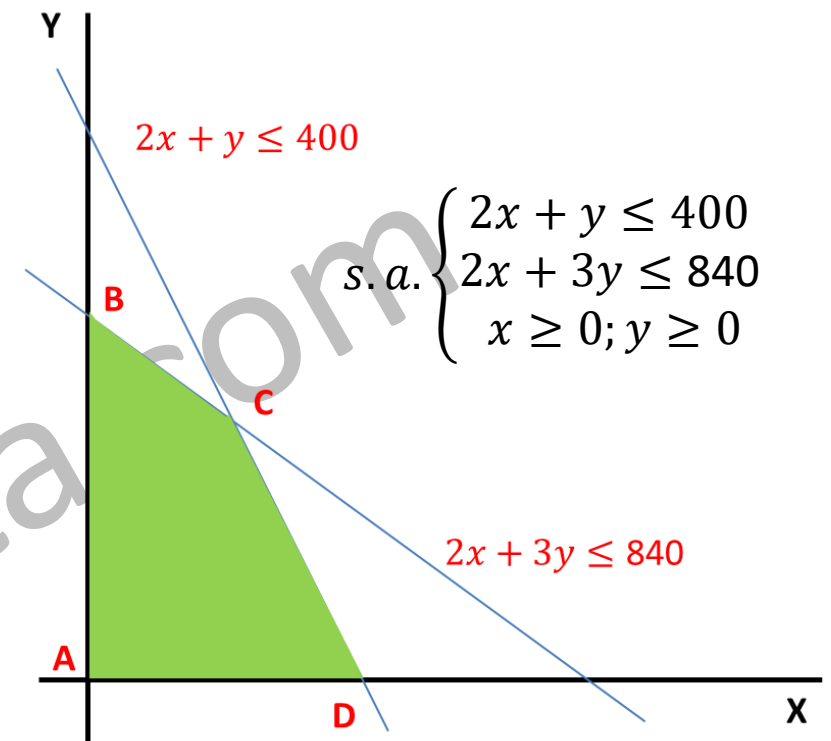
Las coordenadas del vértice C son: $C = (90, 220)$



Problema 2

El mínimo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

x	y	$z=15x+10y$
0	0	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$
0	280	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 280 = 2800$
90	220	$15 \cdot 90 + 10 \cdot 220 = 3550$ (máximo)
200	0	$15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000$.



Problema 2

Solución: se debe producir **90 kg** de la mezcla A (50% de cada tipo de café) y **220 kg** de café de la mezcla B (25% de café colombiano y 75% de café brasileño). Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el beneficio máximo será de **3550 euros**.

x	y	$z=15x+10y$
0	0	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0$
0	280	$15 \cdot 0 + 10 \cdot 280 = 2800$
90	220	$15 \cdot 90 + 10 \cdot 220 = 3550$ (máximo)
200	0	$15 \cdot 200 + 10 \cdot 0 = 3000$.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 3

Análisis de una función

©Ángel Cuesta Arza

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En mi página web podrás encontrar muchos ejercicios como este. angelcuesta.com

No dejes de revisar mi canal, añado contenido casi diariamente.

Te dejo aquí una pequeña muestra de ejercicios resueltos en años anteriores. Son muy parecidos y vale la pena trabajarlos a fondo.



Junio 2021

Problema 3

PAU Comunidad Valenciana



Julio 2021

Problema 3

PAU Comunidad Valenciana

Problema 3

Se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$. Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución: Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 - x - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \longrightarrow \text{lo cual implica que el Dominio es:}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4}{0^2 - 0 - 1} = \frac{-4}{-1} = -4 \rightarrow \boxed{A = (0, 4)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = 0 \rightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2/3 \end{cases}$$

$$\boxed{B = (2, 0)}$$

$$\boxed{C = (-2/3, 0)}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar mas fácilmente la función en el último apartado.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-0'382}{0} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-0'382}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^-} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-0'382}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ es A.V. de } f(x)$

$$\text{En } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-2'618}{0} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^+} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-2'618}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^-} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x + 1} = \frac{-2'618}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ es A.V. de } f(x)$

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

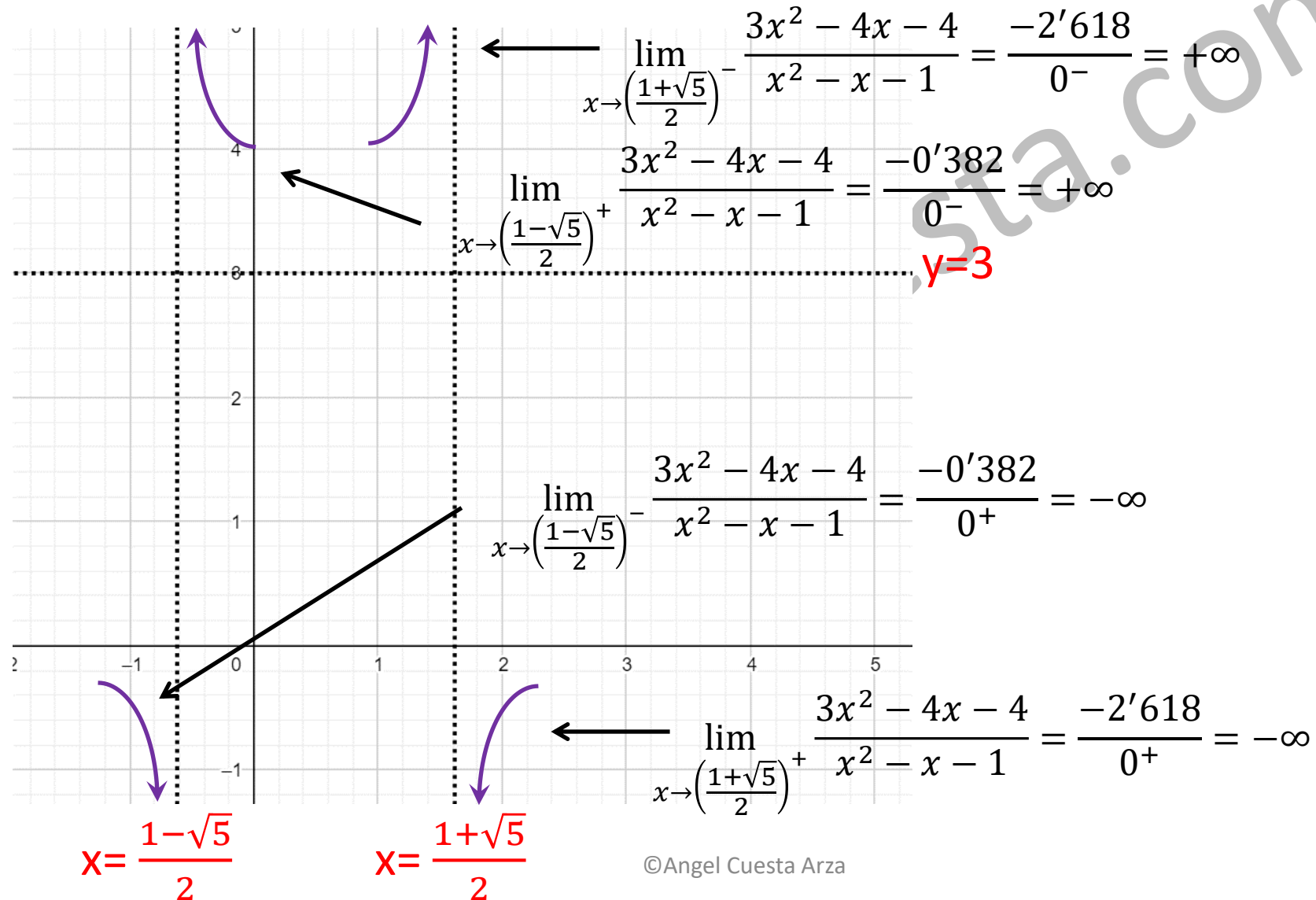
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

por lo tanto, $y = 3$ es A. H. de $f(x)$

Problema 3

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



Problema 3

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - x - 1}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{(6x - 4) \cdot (x^2 - x - 1) - (3x^2 - 4x - 4) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 6x^2 - 6x - 4x^2 + 4x + 4 - (6x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 4x - 8x + 4)}{(x^2 - x - 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x - 1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x - 1)^2} = 0 \longrightarrow x^2 + 2x = 0 \longrightarrow x \cdot (x + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-2	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+	+
$f(x)$						

$f(x)$ es **decreciente** si: $x \in \left(-2, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)$

$f(x)$ es **creciente** si: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

Problema 3

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-2	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	0	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un **máximo relativo en $x=-2$** y un **mínimo relativo en $x=0$** .

Se sustituyen esos valores en la función para obtener la coordenada y del máximo y del mínimo relativo.

$$f(-2) = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4}{(-2)^2 - (-2) - 1} = \frac{16}{5}$$

Las coordenadas del máximo relativo son:

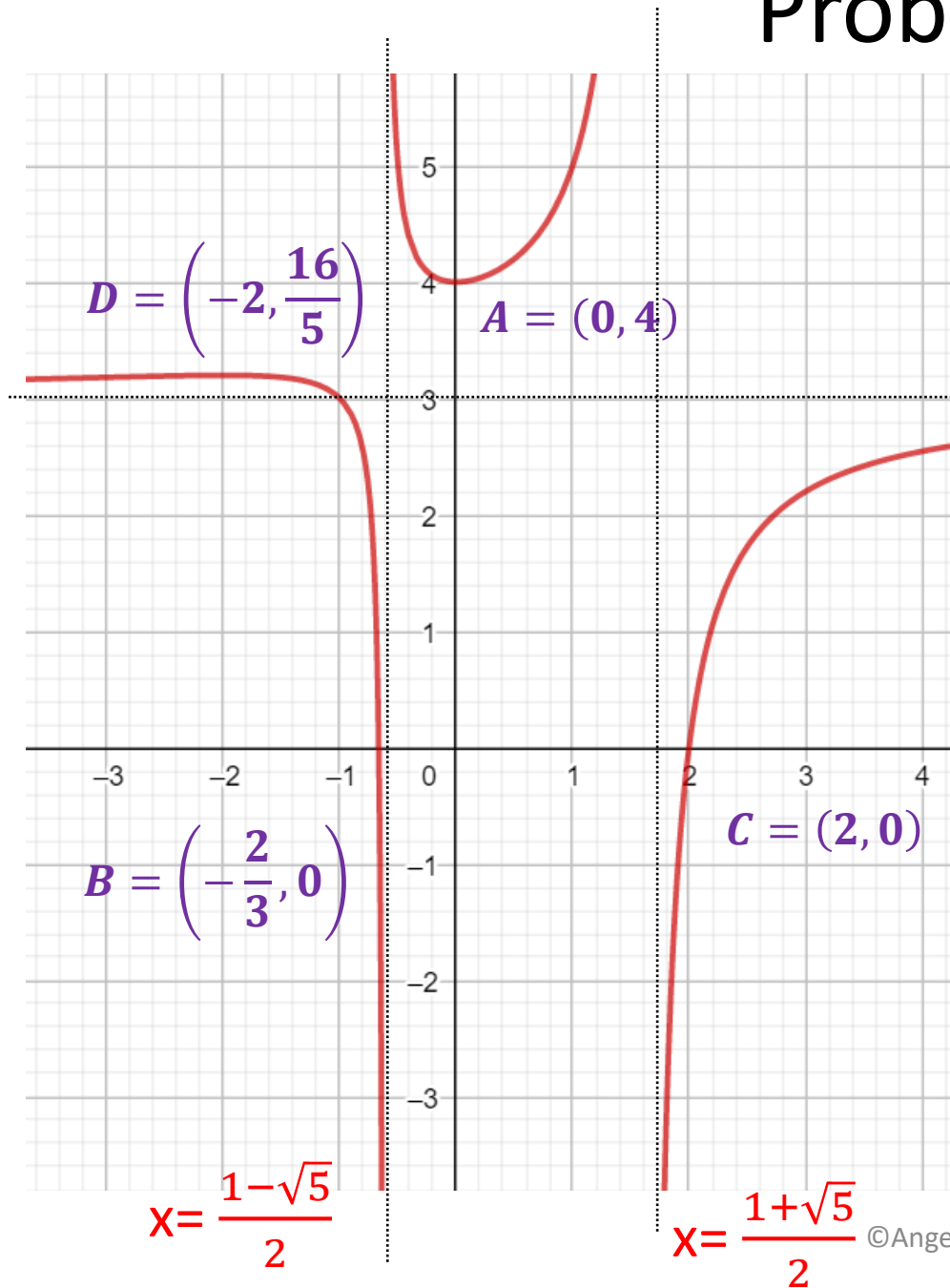
$$\left(-2, \frac{16}{5}\right)$$

$$f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 4}{0^2 - 0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Las coordenadas del mínimo relativo son:

$$(0, 4)$$

Problema 3



El máximo relativo (**D**) no se ve muy bien porque la función es casi plana. El mínimo relativo (**A**) coincide con el punto de corte con el eje Y.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



Problema 4

Optimización de una función

©Angel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



Problema 4

Una máquina está productiva durante un año desde su compra. Se sabe que el rendimiento (en porcentaje) que tiene la máquina x meses después de su compra viene dado por la función

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

para cualquier x entre 0 y 12.

- a) ¿Es el rendimiento que tiene la máquina un mes después de su compra superior al rendimiento que tiene dos meses después de su compra?
- b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?
- c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%?

Solución:

Se calcula el rendimiento el primer y el segundo mes. Para ello se sustituye en la función $x=1$ y $x=2$.

$$f(1) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 - 1^3) = 82 \%$$

$$f(2) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 - 2^3) = 84'6 \%$$

El rendimiento de la máquina el primer mes NO es superior al del segundo mes.

Problema 4

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

b) ¿Tras cuántos meses después de su compra alcanza la máquina su mayor rendimiento?; ¿cuál es dicho rendimiento máximo?

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero.

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (15 + 12x - 3x^2) \longrightarrow \frac{1}{10} \cdot (15 + 12x - 3x^2) = 0 \longrightarrow -3x^2 + 12x + 15 = 0$$

Se resuelve la ecuación. $\begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$ Puesto que x está comprendida entre 0 y 12, **sólo es válida la solución x=5.**

Se hace un estudio de signos de la derivada.

	0	5	12
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

f(x) presenta un máximo relativo en **x=5**.

Se calcula su valor para x=5.

$$f(5) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = \mathbf{90 \%}$$

El máximo rendimiento se alcanza a los 5 meses y es del 90%.

Problema 4

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15x + 6x^2 - x^3)$$

c) A lo largo del año, ¿tiene en algún momento la máquina un rendimiento inferior al 10%?

Razonaré utilizando el estudio de signos obtenido anteriormente.

	0	5	12
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

Como se puede deducir de dicho estudio, la función crece desde $x=0$ hasta $x=5$ y luego decrece desde $x=5$ hasta $x=12$.

Se calcula el rendimiento para esos tres meses

$$f(0) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 - 0^3) = 80 \% \quad f(5) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 5 + 6 \cdot 5^2 - 5^3) = 90 \%$$

$$f(12) = \frac{1}{10} \cdot (800 + 15 \cdot 12 + 6 \cdot 12^2 - 12^3) = 11'6 \%$$

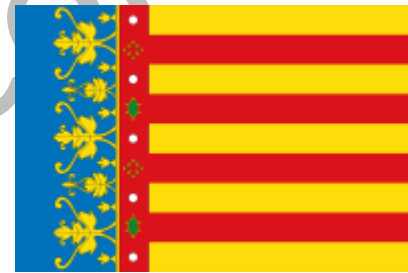
La función parte de un rendimiento del 80% y sube hasta el 90%. Luego disminuye desde el 90% hasta el 11'6%. Por ello podemos decir que **en ningún momento está por debajo del 10%.**

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



ÁNGEL CUESTA
Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 5

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En mi página web podrás encontrar ejercicios como este. angelcuesta.com

No dejes de revisar mi canal, añado contenido casi diariamente.

Aquí te dejo un código QR para que puedas practicar algún ejercicio más de este tipo.



Septiembre 2020

Problema 3

PAU Comunidad Valenciana

Problema 5

Dados dos sucesos A y B , se sabe que $P(B)=0,4$, $P(A^c \cap B^c)=0,2$ y $P(A \cap B)=0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B , respectivamente. Se pide:

- a) Calcular la probabilidad del suceso $A \cup B$.
- b) Calcular la probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos.
- c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A .
- d) ¿Son independientes los sucesos A y B ?

Solución:

Se aplica la primera ley de Morgan y la ley del suceso contrario.

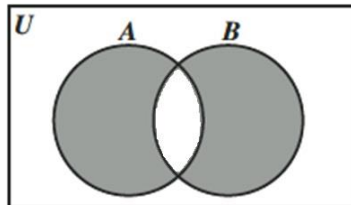
$$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 0'2 \longrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0'2 = \mathbf{0'8}$$

La probabilidad de la unión de los sucesos A y B es **0'8**.

La probabilidad de que se verifique sólo uno de los dos sucesos, se conoce como diferencia simétrica.

Su fórmula es la siguiente: $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0'8 - 0'3 = \mathbf{0'5}$

Se puede representar gráficamente:



La probabilidad de que solamente se verifique uno de los sucesos es **0'5**.

Problema 5

Dados dos sucesos A y B , se sabe que $P(B)=0,4$, $P(A^c \cap B^c)=0,2$ y $P(A \cap B)=0,3$, siendo A^c y B^c los sucesos complementarios de A y B , respectivamente. Se pide:

c) Calcular la probabilidad de B condicionado a A .

Se necesita conocer la probabilidad de A , ya que la fórmula que debemos aplicar es: $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Según la propiedad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \longrightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B)$

$$P(A) = 0'8 - 0'4 + 0'3 = 0'7$$

Se aplica la fórmula de la probabilidad condicionada. $P(B/A) = \frac{0'3}{0'7} = \frac{3}{7}$ La probabilidad de B condicionado a A es **3/7**.

d) ¿Son independientes los sucesos A y B ?

Dos sucesos son independientes si verifican la ecuación: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

A partir de los datos que disponemos: $P(A \cap B) = 0'3$

$$P(A) \cdot P(B) = 0'7 \cdot 0'4 = 0'28$$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, los sucesos A y B no son independientes.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS

Julio 2022



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 6

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PAU Junio 2019

Problema 6

El director de una entidad que audita la contabilidad de empresas sabe, por experiencias pasadas, que cuando se hace una auditoría el 30% de las empresas merece una calificación de «Excelente», el 50% de las empresas merece la calificación de «Aceptable» y el 20% restante merece una calificación de «Deficiente». El director también sabe que entre los auditores de su entidad hay un 90% de auditores que siempre auditan correctamente y dan a cada empresa la calificación que merece; pero hay un 10% de auditores que no auditan correctamente y dan siempre una calificación de «Aceptable».

- a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»?
- b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?
- c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?

Problema 6

Primero asignamos una letra a cada suceso.

E = La empresa merece calificación de **EXCELENTE**.

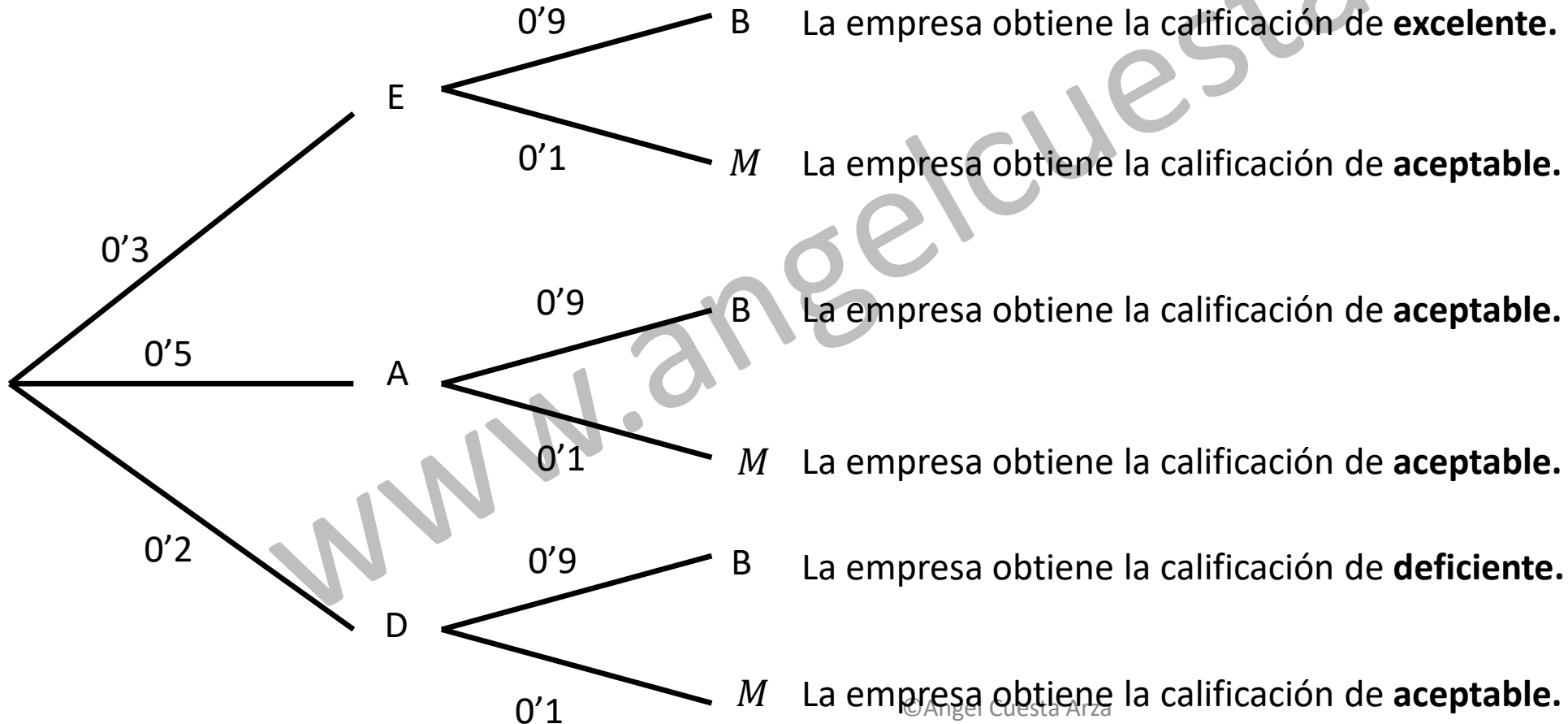
A = La empresa merece calificación de **ACEPTABLE**

D = La empresa merece calificación de **DEFICIENTE**

B = El auditor trabaja correctamente.

M = El auditor trabaja mal

Se construye un diagrama de árbol, aunque en esta ocasión habrá que explicar más cosas de lo habitual.



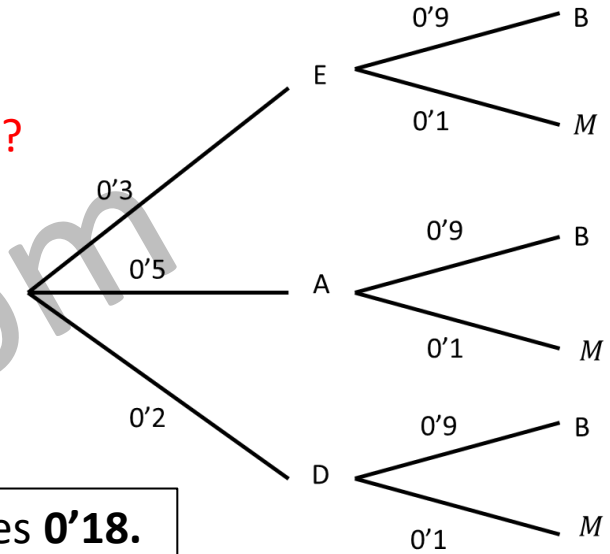
Problema 6

a) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación de «Deficiente»?

La proporción de empresas auditadas por esa entidad que recibe la calificación de «Deficiente» son aquellas que realmente son deficientes y que han sido bien auditadas.

$$P(D \cap B) = P(D) \cdot P(B/D) = 0'2 \cdot 0'9 = \mathbf{0'18}$$

La proporción de empresas auditadas por esa entidad que recibe la calificación de «Deficiente» es **0'18**.



b) ¿Qué proporción de empresas auditadas por esa entidad recibe la calificación que realmente merece?

La proporción de empresas auditadas por esa entidad que recibe la calificación que realmente merece son aquellas que han sido bien auditadas. Además hay que sumar aquellas que siendo aceptables, han sido mal auditadas, puesto que aún así han recibido la calificación que merecen.

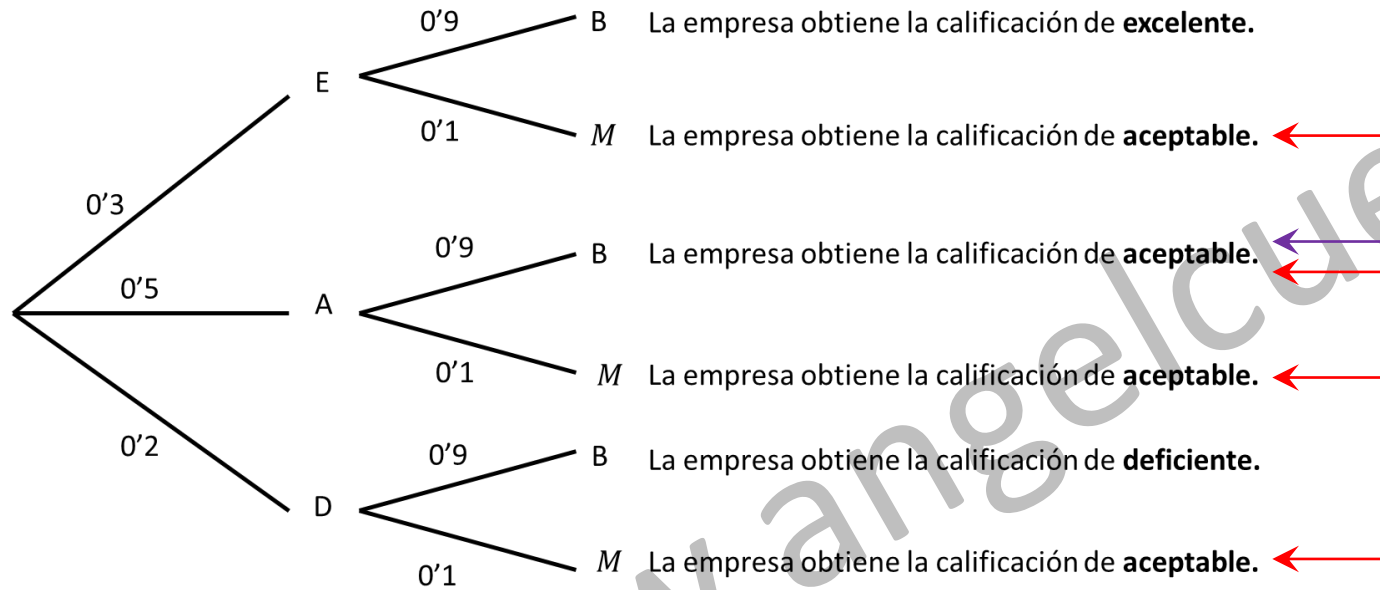
$$P(\text{que merece}) = P(B) + P(M/A) = P(E) \cdot P(B/E) + P(A) \cdot P(B/A) + P(D) \cdot P(B/D) + P(A) \cdot P(M/A)$$

$$P(\text{que merece}) = 0'3 \cdot 0'9 + 0'5 \cdot 0'9 + 0'2 \cdot 0'9 + 0'5 \cdot 0'1 = \mathbf{0'95}$$

La proporción de empresas auditadas por esa entidad que recibe la calificación que realmente merece es **0'95**.

Problema 6

c) Para analizar si un determinado auditor audita correctamente o no, el director le encarga que audite la contabilidad de una empresa escogida al azar. No sabemos cuál es la calificación que merece esa empresa. Si el auditor da la calificación de «Aceptable», ¿cuál es la probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente?



Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(B/\text{Calificación aceptable}) = \frac{P(B \cap \text{Calificación aceptable})}{P(\text{Calificación aceptable})} = \frac{0'5 \cdot 0'9}{0'3 \cdot 0'1 + 0'5 \cdot 0'1 + 0'2 \cdot 0'1 + 0'5 \cdot 0'9}$$

$$P(B/\text{Calificación aceptable}) = \frac{0'45}{0'55} = \frac{9}{11}$$

La probabilidad de que este auditor sea uno de los que siempre auditan correctamente es **9/11**.