Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2023

Problema 1

Álgebra matricial

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

se pide: a) Calcular la matriz A^2 y su inversa. b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

Se calcula A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A^2|$; $|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 36 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A^2 **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A^2) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A^2))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A^2)^{-1} = \dfrac{1}{|A^2|} \cdot \left(Adj(A^2)\right)^t \longrightarrow (A^2)^{-1} = \dfrac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 & -5/8 \\ 5/8 & -3/16 & 1/8 \\ 3/8 & -5/16 & -1/8 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

Despejamos a continuación la matriz X, utilizando la matriz inversa de A^2. Podemos hacer esto porque acabamos de demostrar dicha matriz existe.

$$2 \cdot A^2 \cdot X = 4 \cdot B \xrightarrow{:2} A^2 \cdot X = 2 \cdot B \longrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B \longrightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B$$

$X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B$ Se sustituye y se calcula la matriz X.

$$X = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-10) \cdot 0 & (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + (-10) \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-10) \cdot 1 \\ 10 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 10 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 10 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-10)\cdot 0 & (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 + (-10)\cdot 0 & (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-10)\cdot 1 \\ 10\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 10\cdot(-2) + (-3)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 10\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 6\cdot 3 + (-5)\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 6\cdot(-2) + (-5)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 6\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & -\frac{7}{4} \\ \frac{33}{8} & -4 & \frac{3}{4} \\ \frac{23}{8} & -4 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$