Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2023

Problema 3
Análisis de una función

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.

https://youtu.be/kONbgIMSFpU

Problema 3

Dada la función $f(x) = \dfrac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$2\cdot(x^2-1)=0 \longrightarrow x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm 1$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-1,1\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x=0) \rightarrow f(0) = \frac{4\cdot 0-5}{2\cdot(0^2-1)} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, \frac{5}{2}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y=0) \rightarrow \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = 0 \rightarrow 4x-5=0 \rightarrow x = \frac{5}{4} \quad \boxed{\boldsymbol{B = \left(\frac{5}{4}, 0\right)}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1; $\lim_{x \to --1} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-9}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1^+} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-9}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \to -1^-} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-9}{0^+} = -\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = -1 \ es \ A.V.de \ f(x)}}$

En x=1; $\lim_{x \to -1} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 1^+} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{4x-5}{2 \cdot (x^2-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}, luego \ \boxed{\boldsymbol{x = 1 \ es \ A.V.de \ f(x)}}$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$$

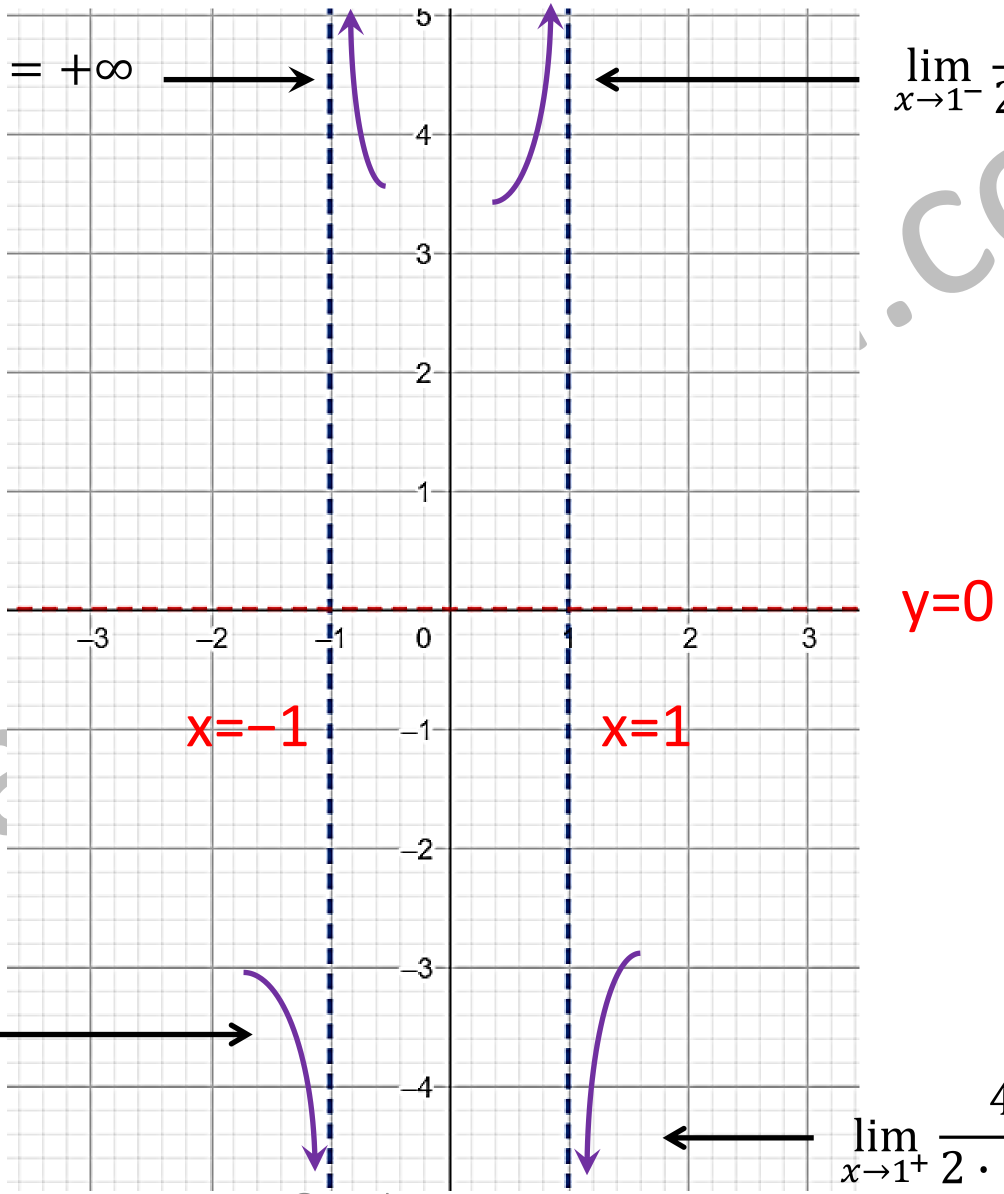
$$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y=0\ es\ A.H.de\ f(x)}}$$

Problema 3

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to -1^-} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Problema 3

$$f(x)=\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

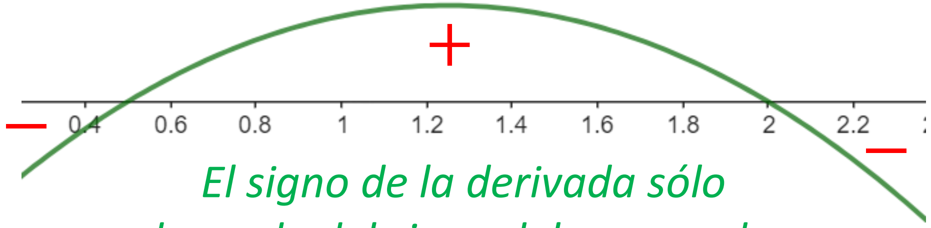
Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{4\cdot 2\cdot(x^2-1)-(4x-5)\cdot 2\cdot 2x}{[2\cdot(x^2-1)]^2}=\frac{8x^2-8-16x^2+20x}{4\cdot(x^2-1)^2}=\frac{-8x^2+20x-8}{4\cdot(x^2-1)^2}=\frac{4\cdot(-2x^2+5x-2)}{4\cdot(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1/2 \\ x=2 \end{cases}$

$y=-2x^2+5x-2$



El signo de la derivada sólo depende del signo del numerador

Se estudia el signo de la derivada:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1/2)$	$(1/2,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

f(x) es **creciente** en $x\epsilon(1/2,1)\cup(1,2)$ y **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-1)\cup(-1,1/2)\cup(2,+\infty)$.

Problema 3

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$ a -1	-1 a $1/2$	$1/2$ a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en **x=1/2** y un máximo relativo en **x=2**.

Se sustituyen esos valores en la función para obtener las imágenes de ambos valores.

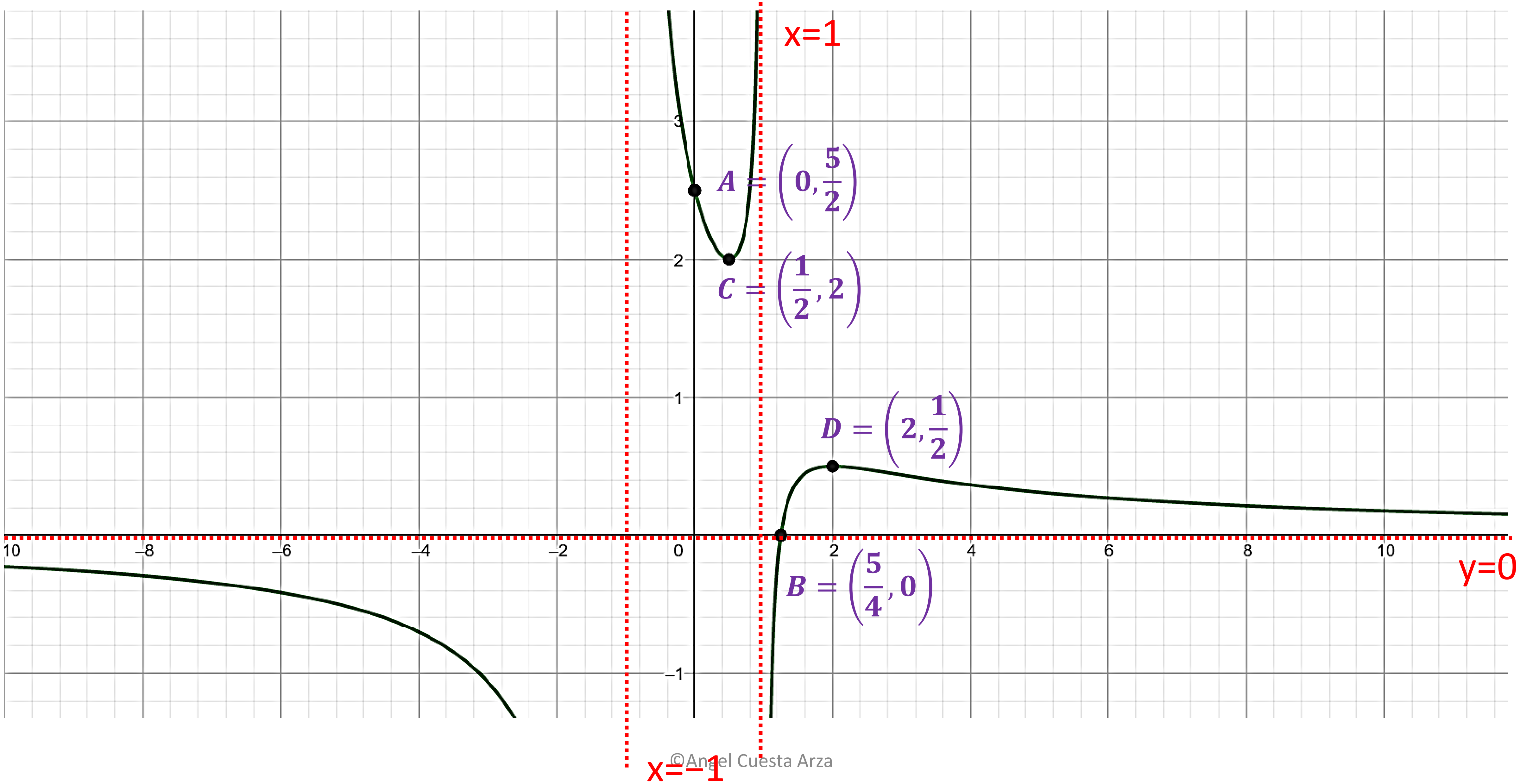
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\frac{1}{2}-5}{2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]}=\frac{-3}{-3/2}=2$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $\boxed{\left(\frac{1}{2},2\right)}$

$$f(2)=\frac{4\cdot 2-5}{2\cdot(2^2-1)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(2,\frac{1}{2}\right)}$

Problema 3



x=1
$A = \left(0, \frac{5}{2}\right)$
$C = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
$D = \left(2, \frac{1}{2}\right)$
$B = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$
y=0
x=−1