Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2023

Problema 1
Álgebra matricial

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

se pide: a) Calcular la matriz A^2 y su inversa. b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

Se calcula A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A^2|$; $|A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 36 - 16 - 6 - 6 = 16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A^2 **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A^2) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A^2))^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \cdot \left(Adj(A^2)\right)^t \longrightarrow (A^2)^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/8 & -1/16 & -5/8 \\ 5/8 & -3/16 & 1/8 \\ 3/8 & -5/16 & -1/8 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

Despejamos a continuación la matriz X, utilizando la matriz inversa de A^2. Podemos hacer esto porque acabamos de demostrar dicha matriz existe.

$$2 \cdot A^2 \cdot X = 4 \cdot B \xrightarrow{:2} A^2 \cdot X = 2 \cdot B \longrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B \longrightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B$$

$X = (A^2)^{-1} \cdot 2 \cdot B$ Se sustituye y se calcula la matriz X.

$$X = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + (-10) \cdot 0 & (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + (-10) \cdot 0 & (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-10) \cdot 1 \\ 10 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 10 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 10 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 6 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 6 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-10)\cdot 0 & (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 + (-10)\cdot 0 & (-2)\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-10)\cdot 1 \\ 10\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 10\cdot(-2) + (-3)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 10\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 6\cdot 3 + (-5)\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 6\cdot(-2) + (-5)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 6\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 0 & -\frac{7}{4} \\ \frac{33}{8} & -4 & \frac{3}{4} \\ \frac{23}{8} & -4 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2023

Problema 2

Problema de sistemas de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.

ÁNGEL CUESTA
Tu profesor en la red
SUSCRÍBETE

PAU Julio 2021

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

Problema 2

Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x=millones de euros que recibe la hija mayor.
y=millones de euros que recibe la hija mediana.
z=millones de euros que recibe la hija pequeña.

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

"A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos" $\longrightarrow x = 9 + \frac{y+z}{2} \longrightarrow 2x - y - z = 18$

"A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos." $\longrightarrow y = \frac{x+z}{2} \longrightarrow x - 2y + z = 0$

"A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos" $\longrightarrow z = 0{,}35 \cdot (x+y) \longrightarrow 0{,}35x + 0{,}35y - z = 0$

Problema 2

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 0{,}35x + 0{,}35y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 18 \\ 35x + 35y - 100z = 0 \end{cases}$$

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal. ¡BÚSCALO!

Se resuelve el sistema mediante el método de Gauss (por variar un poco).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 35 & 35 & -100 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-35F_1]{F_2=F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 105 & -135 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-35F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -30 & -630 \end{pmatrix}$$

F_2	2	-1	-1	18
$-2F_1$	-2	4	-2	0
$F_2=F_2-2F_1$	0	3	-3	18

F_3	0	105	-135	0
$-35F_2$	0	-105	105	-630
$F_2=F_2-2F_1$	0	0	-30	-630

F_3	35	35	-100	0
$-35F_1$	-35	70	-35	0
$F_2=F_2-2F_1$	0	105	-135	0

Una vez escalonada la matriz ya podemos resolver el sistema en la siguiente diapositiva.

Problema 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 0 & -30 & -630 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 18 \\ -30z = -630 \end{cases} \longrightarrow z = \frac{-630}{-30} = 21$$

$$3y - 3z = 18 \longrightarrow y = \frac{18 + 3z}{3} = \frac{18 + 3 \cdot 21}{3} = 27$$

$$x - 2y + z = 0 \longrightarrow x = 2y - z = 2 \cdot 27 - 21 = 33$$

Solución: La hermana mayor recibe **33 millones de euros**, la mediana **27 millones de euros** y la menor **21 millones de euros**.

Problema 2

Problema 2

Problema 2

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2023

Problema 3
Análisis de una función

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.

https://youtu.be/kONbgIMSFpU

Problema 3

Dada la función $f(x) = \dfrac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$2\cdot(x^2-1)=0 \longrightarrow x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm 1$ lo cual implica que el Dominio es: $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R - \{-1, 1\}}}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y (x=0) \rightarrow f(0) = \frac{4\cdot 0-5}{2\cdot(0^2-1)} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{A = \left(0, \frac{5}{2}\right)}}$$

$$Eje\ X\ (y=0) \rightarrow \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = 0 \rightarrow 4x-5=0 \rightarrow x=\frac{5}{4} \quad \boxed{\boldsymbol{B = \left(\frac{5}{4}, 0\right)}}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

En x=−1; $$\lim_{x\to --1}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-9}{0}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-9}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^-}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-9}{0^+}=-\infty\end{cases},luego\ \boxed{\boldsymbol{x=-1\ es\ A.V.de\ f(x)}}$$

En x=1; $$\lim_{x\to -1}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-1}{0}\longrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{cases},luego\ \boxed{\boldsymbol{x=1\ es\ A.V.de\ f(x)}}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x} = 0$$

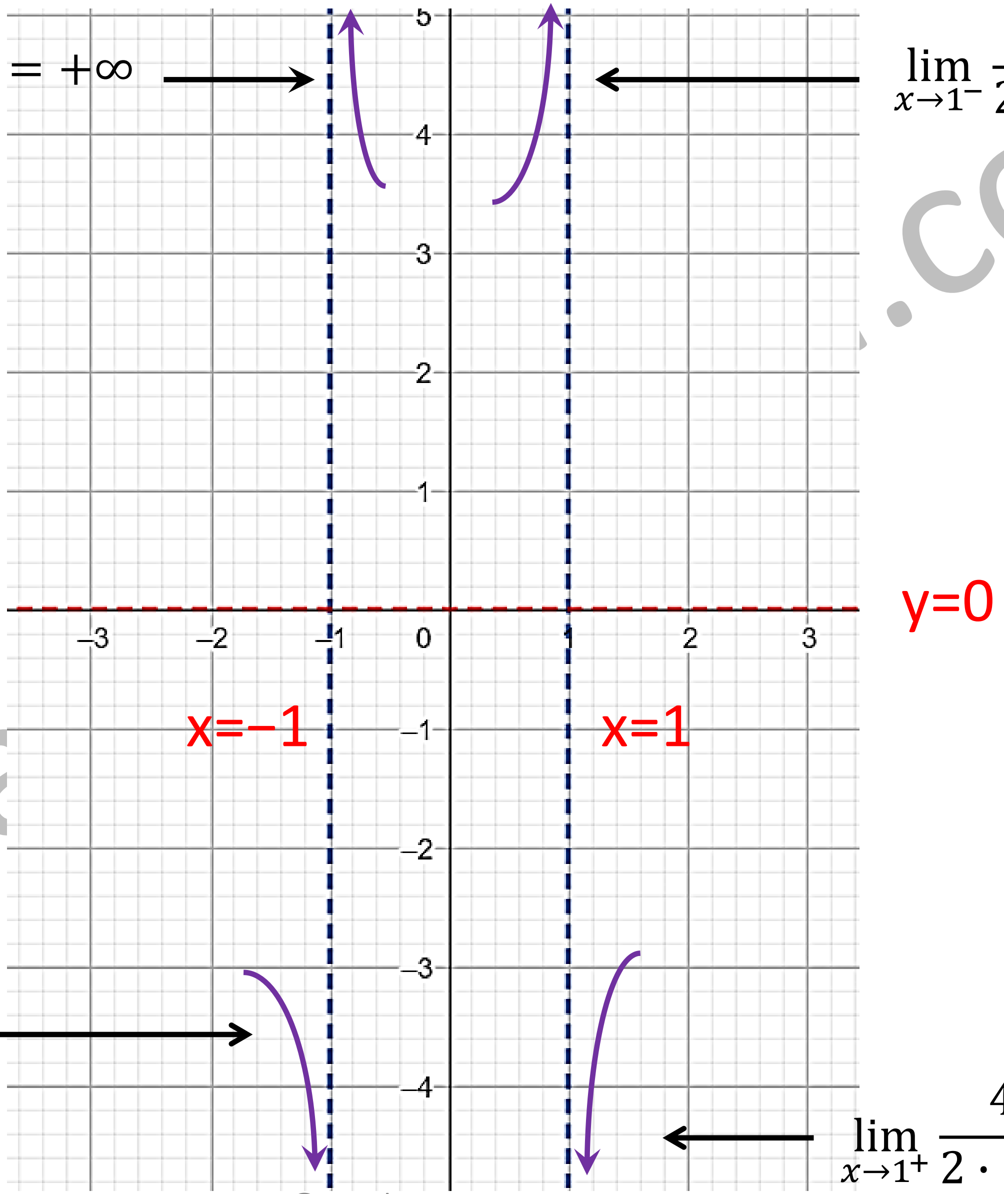
$$\boxed{por\ lo\ tanto, \boldsymbol{y=0\ es\ A.H.\ de\ f(x)}}$$

Problema 3

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



$$\lim_{x\to -1^-} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-9}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Problema 3

$$f(x) = \frac{4x-5}{2\cdot(x^2-1)}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

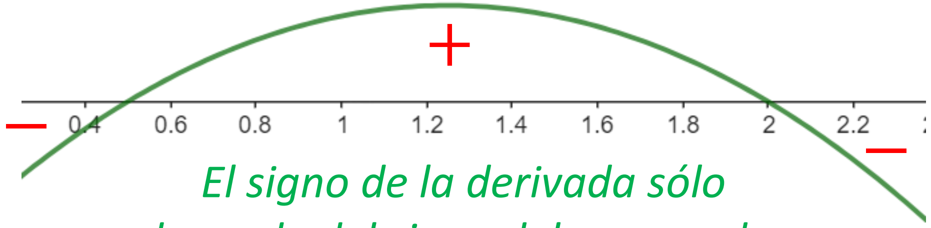
Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{4\cdot 2\cdot(x^2-1)-(4x-5)\cdot 2\cdot 2x}{[2\cdot(x^2-1)]^2} = \frac{8x^2-8-16x^2+20x}{4\cdot(x^2-1)^2} = \frac{-8x^2+20x-8}{4\cdot(x^2-1)^2} = \frac{4\cdot(-2x^2+5x-2)}{4\cdot(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero: $\dfrac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$y = -2x^2+5x-2$$



El signo de la derivada sólo depende del signo del numerador

Se estudia el signo de la derivada:

$-\infty$ $\quad -1 \quad 1/2 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

f'(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

f(x) es **creciente** en $x\epsilon(1/2,1) \cup (1,2)$y **decreciente** en $x\epsilon(-\infty,-1) \cup (-1,1/2) \cup (2,+\infty)$.

Problema 3

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

$-\infty \qquad -1 \qquad 1/2 \qquad 1 \qquad 2 \qquad +\infty$

f’(x)	−	−	+	+	−
f(x)	↘	↘	↗	↗	↘

Se observa en el cuadro que la función tiene un mínimo relativo en **x=1/2** y un máximo relativo en **x=2**.

Se sustituyen esos valores en la función para obtener las imágenes de ambos valores.

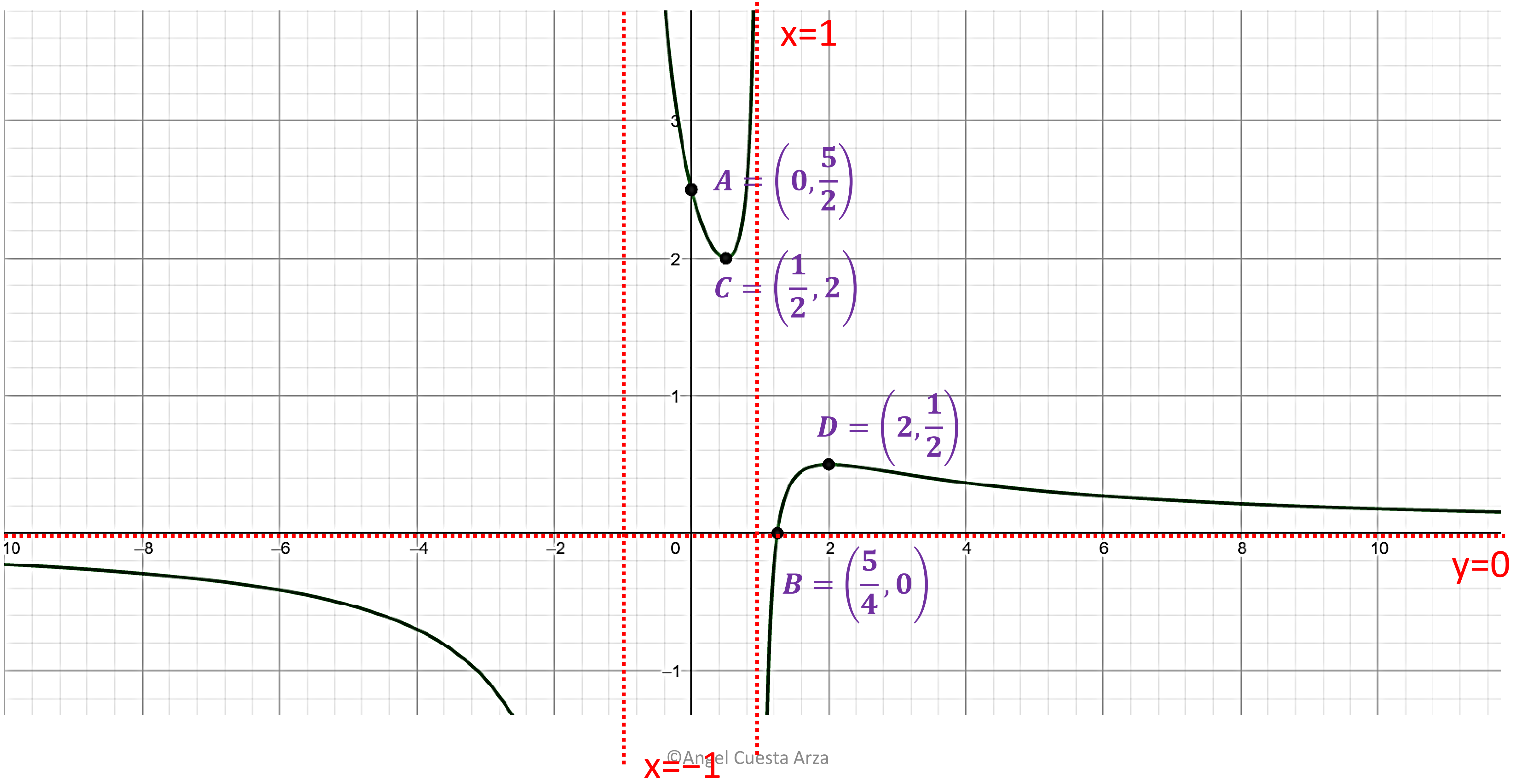
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\cdot\frac{1}{2}-5}{2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]} = \frac{-3}{-3/2} = 2$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $\boxed{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\mathbf{2}\right)}$

$$f(2) = \frac{4\cdot 2-5}{2\cdot(2^2-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Las coordenadas del máximo relativo son: $\boxed{\left(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}$

Problema 3


x=1
$A = \left(0, \frac{5}{2}\right)$
$C = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$
$D = \left(2, \frac{1}{2}\right)$
$B = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$
y=0
x=−1

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2023

Problema 4
Análisis de una función a trozos

Problema 4

El consumo de energía (en MWh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24].

b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Solución: Los tres trozos de la función son polinómicos, por ello podemos afirmar que el dominio de f(x) es $x \in [0,24]$

Por ello, para estudiar la continuidad de la función, basta con estudiar la continuidad en los puntos críticos: $\boldsymbol{x = 6}$ **y** $\boldsymbol{x = 18.}$

Calculo la imagen de f(x) en x=6 y el valor del límite de la función para dicho valor.

$$f(6) = 2 \cdot 6 + 14 = 26$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 6^-} f(x) &= \lim_{x \to 6^-} 2x + 14 = 26 \\ \lim_{x \to 6^+} f(x) &= \lim_{x \to 6^+} -x^2 + 24x - 82 = -(6)^2 + 24 \cdot 6 - 82 = 26 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lim_{x \to 6} f(x) = 26$$

Puesto que: $f(6) = \lim_{x \to 6} f(x) = 26$ $\boxed{\boldsymbol{f(x)} \textbf{ es continua en } \boldsymbol{x = 6.}}$

Problema 4

El consumo de energía (en MWh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14, & \text{si } x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82, & \text{si } x\in\,]6,18] \\ -x+34, & \text{si } x\in\,]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24].

Calculo la imagen de f(x) en x=18 y el valor del límite de la función para dicho valor.

$$f(18)=-18^2+24\cdot 18-82=26$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 18^-} f(x) &= \lim_{x\to 18^-} -x^2+24x-82=-18^2+24\cdot 18-82=26 \\ \lim_{x\to 18^+} f(x) &= \lim_{x\to 18^+} -x+34=-18+34=16 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathit{No\ existe} \lim_{x\to 18} f(x)$$

Por lo tanto: $\boxed{\boldsymbol{f(x)} \textbf{ no es continua en } \boldsymbol{x=6}\textbf{. Presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en dicho valor.}}$

Problema 4

El consumo de energía (en MWh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

Al ser la función discontinua en x=18, debemos ser cuidadosos en este ejercicio, ya que no bastaría hacer un estudio de signos de la derivada para resolver el ejercicio. Vale la pena hacer una representación gráfica para resolver el ejercicio, pues la función tiene trozos sencillos de representar.

Se calcula el vértice de la función cuadrática y se comprueba si pertenece a su intervalo de definición.

$$f_2(x) = -x^2 + 24x - 82 \longrightarrow f_2'(x) = -2x + 24 \longrightarrow -2x + 24 = 0 \longrightarrow x = 12$$

Se sabe que en dicho valor de x, la función cuadrática presenta un máximo relativo, por ser el coeficiente numérico del término cuadrático negativo. También observamos que $x = 12 \in [6,18]$

Se dan valores a cada uno de los trozos.

$f_1(x) = 2x + 14$

x	y
0	14
6	26

$f_2(x) = -x^2 + 24x - 82$

x	y
12	62
6	26
18	26

$f_3(x) = -x + 34$

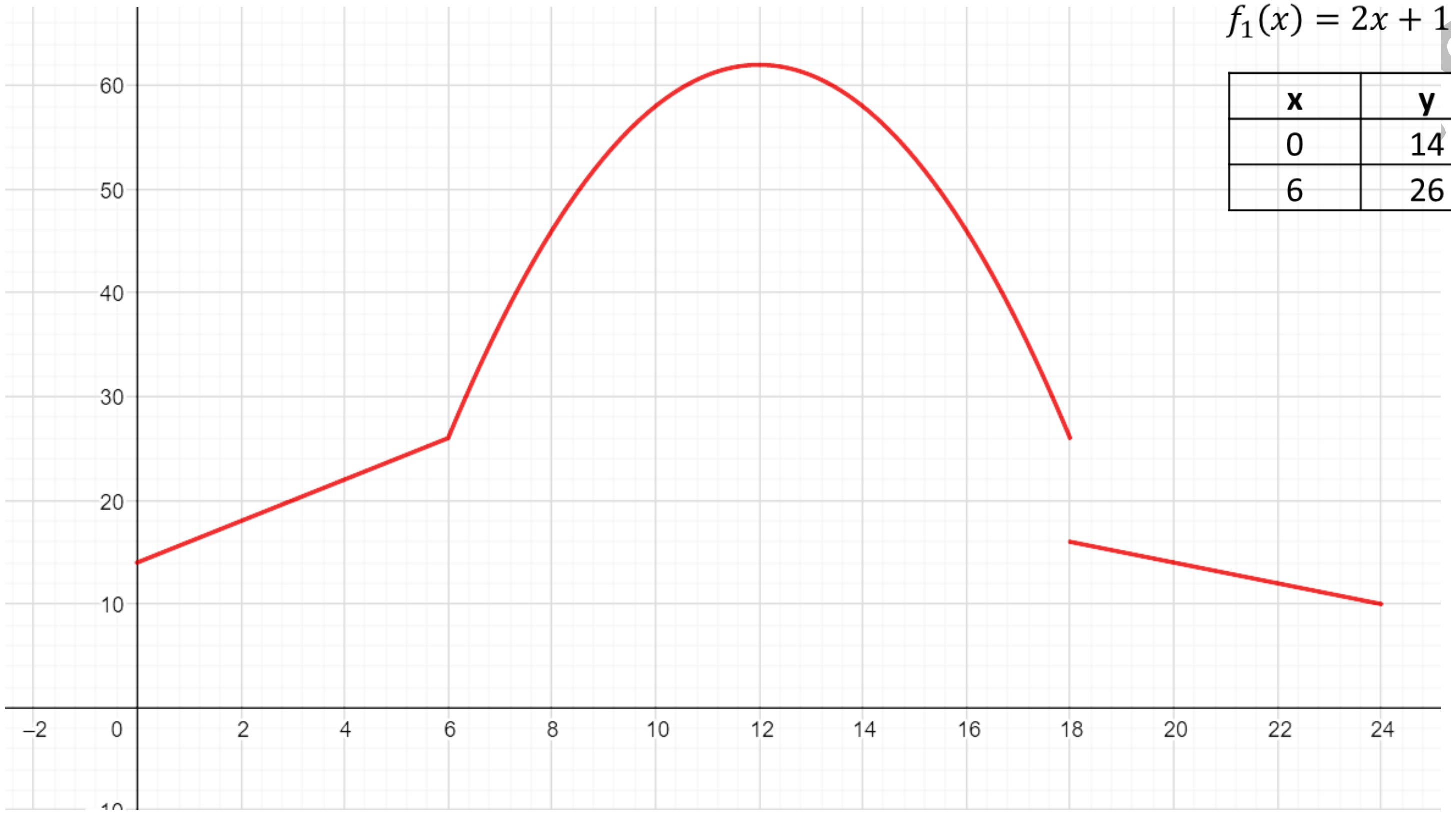
x	y
18	16
24	10

Problema 4

El consumo de energía (en MWh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?



$f_1(x) = 2x + 14$

x	y
0	14
6	26

$f_2(x) = -x^2 + 24x - 82$

x	y
12	62
6	26
18	26

$f_3(x) = -x + 34$

x	y
18	16
24	10

Solución: el consumo máximo se alcanza a las **12h y es de 62 MWh** y el consumo mínimo se alcanza a las **24h y es de 10 MWh**.

Problema 4

El consumo de energía (en MWh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 14, & \text{si } x \in [0,6] \\ -x^2 + 24x - 82, & \text{si } x \in]6,18] \\ -x + 34, & \text{si } x \in]18,24] \end{cases}$$

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Entre las 8 y las diez de la mañana la definición de f(x) $f_2(x) = -x^2 + 24x - 82$

El consumo que se realiza entre esas horas es la suma infinitesimal del consumo de energía en cada instante de tiempo, por ello, el consumo lo obtendremos mediante la siguiente integral definida:

$$C = \int_8^{10} (-x^2 + 24x - 82)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 24 \cdot \frac{x^2}{2} - 82x\right]_8^{10} = \left(\frac{-10^3}{3} + 24 \cdot \frac{10^2}{2} - 82 \cdot 10\right) - \left(\frac{-8^3}{3} + 24 \cdot \frac{8^2}{2} - 82 \cdot 8\right)$$

$$C = \frac{140}{3} - \left(\frac{-176}{3}\right) = \frac{316}{3} \approx 105{,}33$$

Solución: El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es de **105,33 MWh**. Expreso el número en forma decimal porque el contador de la luz así lo expresa. (Podéis mirarlo en una factura de la compañía eléctrica).

Ojo, a continuación, se pone una diapositiva con la gráfica del área.

Problema 4

Con fines pedagógicos se muestra el área calculada.

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS

Julio 2023

Problema 5

Probabilidad

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

PAU Junio 2019

Problema 5

Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

d) ¿Son independientes los sucesos "ser mujer" y "ser especialista en ingeniería"?

Solución: Se definen los sucesos:

I=especialista en ingeniería. C=especialista en ciencias.

A=especialista de América. E=especialista de Europa.

H=el especialista es hombre. M=la especialista es mujer.

A partir de los datos del enunciado podemos concluir que:

Hay 30 especialistas en el grupo de ingeniería (10 de América y 20 de Europa)

Hay 40 especialistas en el grupo de ciencias (21 de América y 19 de Europa)

Se construye el diagrama de árbol a partir de los datos. Sólo se construye la parte necesaria para responder al apartado a). Más adelante se completará.

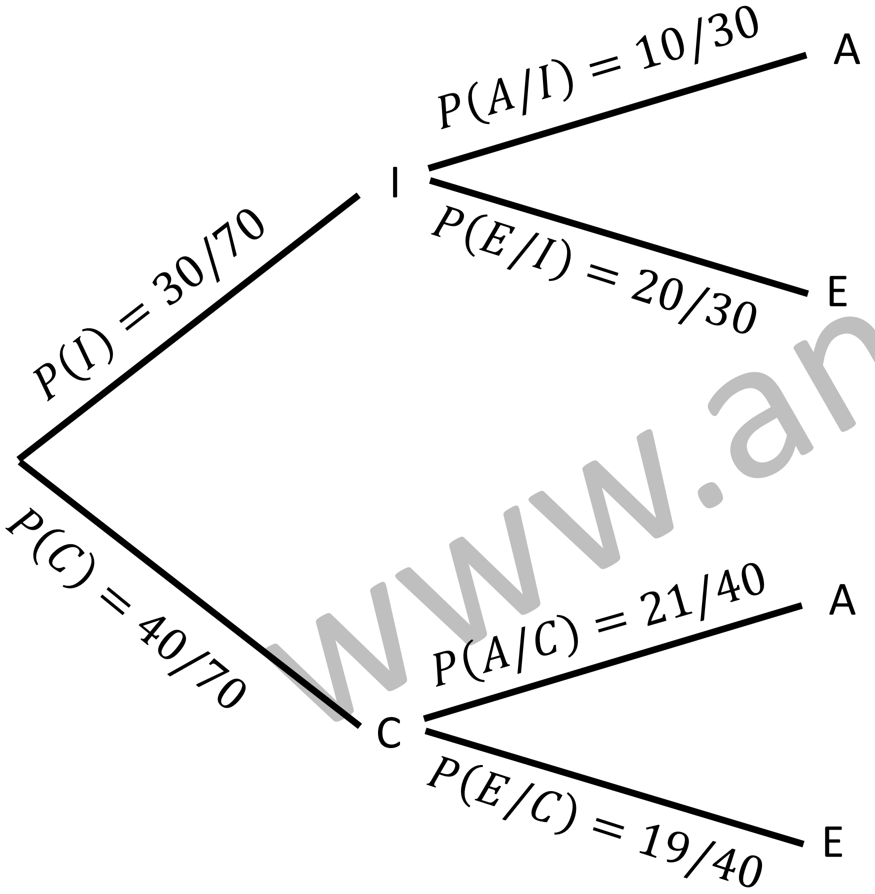
Problema 5

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

En total hay 70 especialistas: 30 de ingeniería y 40 de ciencias.

El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa.

El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa.



Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(E) = P(I) \cdot P(E/I) + P(C) \cdot P(E/C)$$

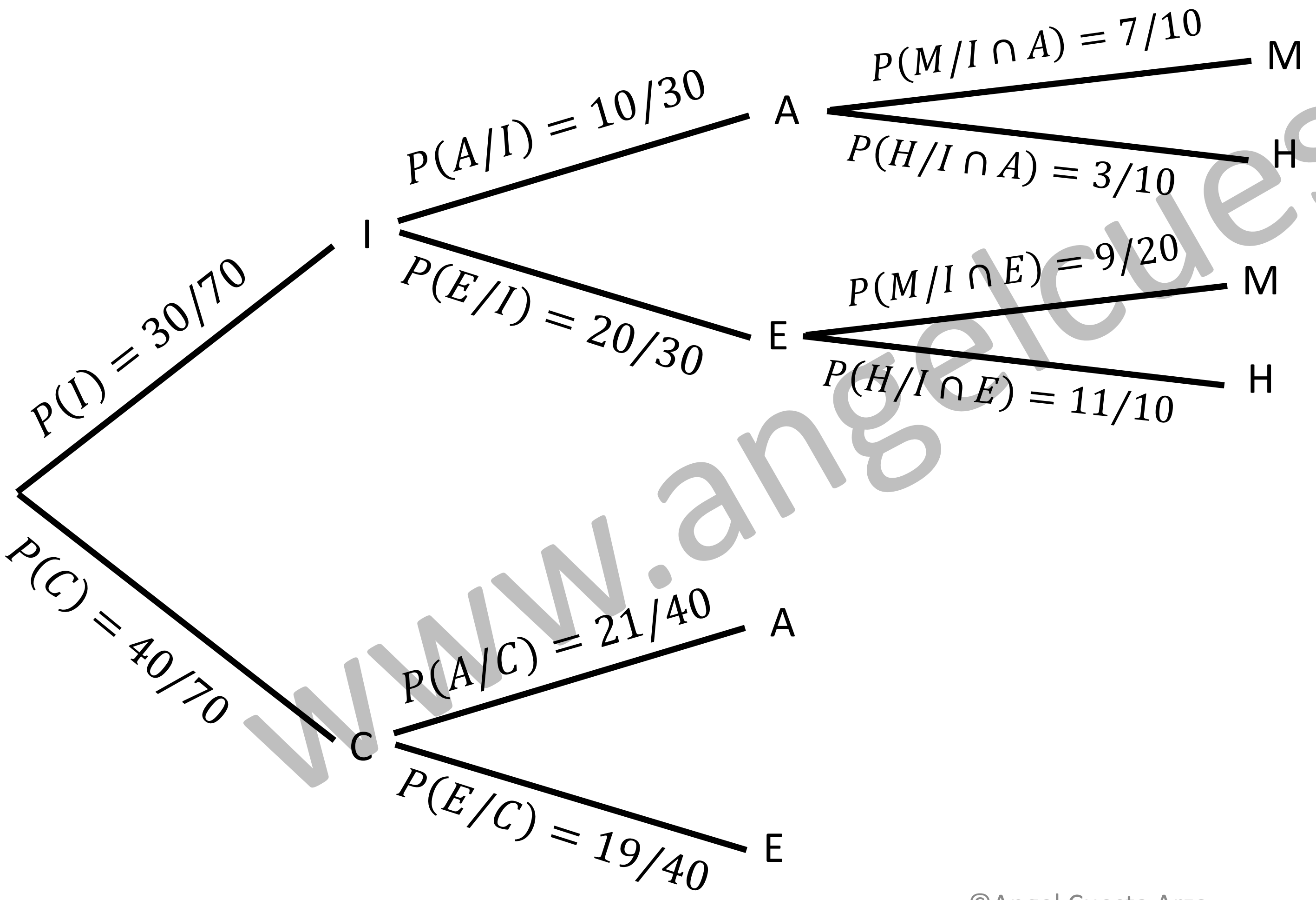
$$P(E) = \frac{30}{70} \cdot \frac{20}{30} + \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} = \frac{39}{70}$$

La probabilidad de el especialista sea de Europa es **39/70.**

Problema 5

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

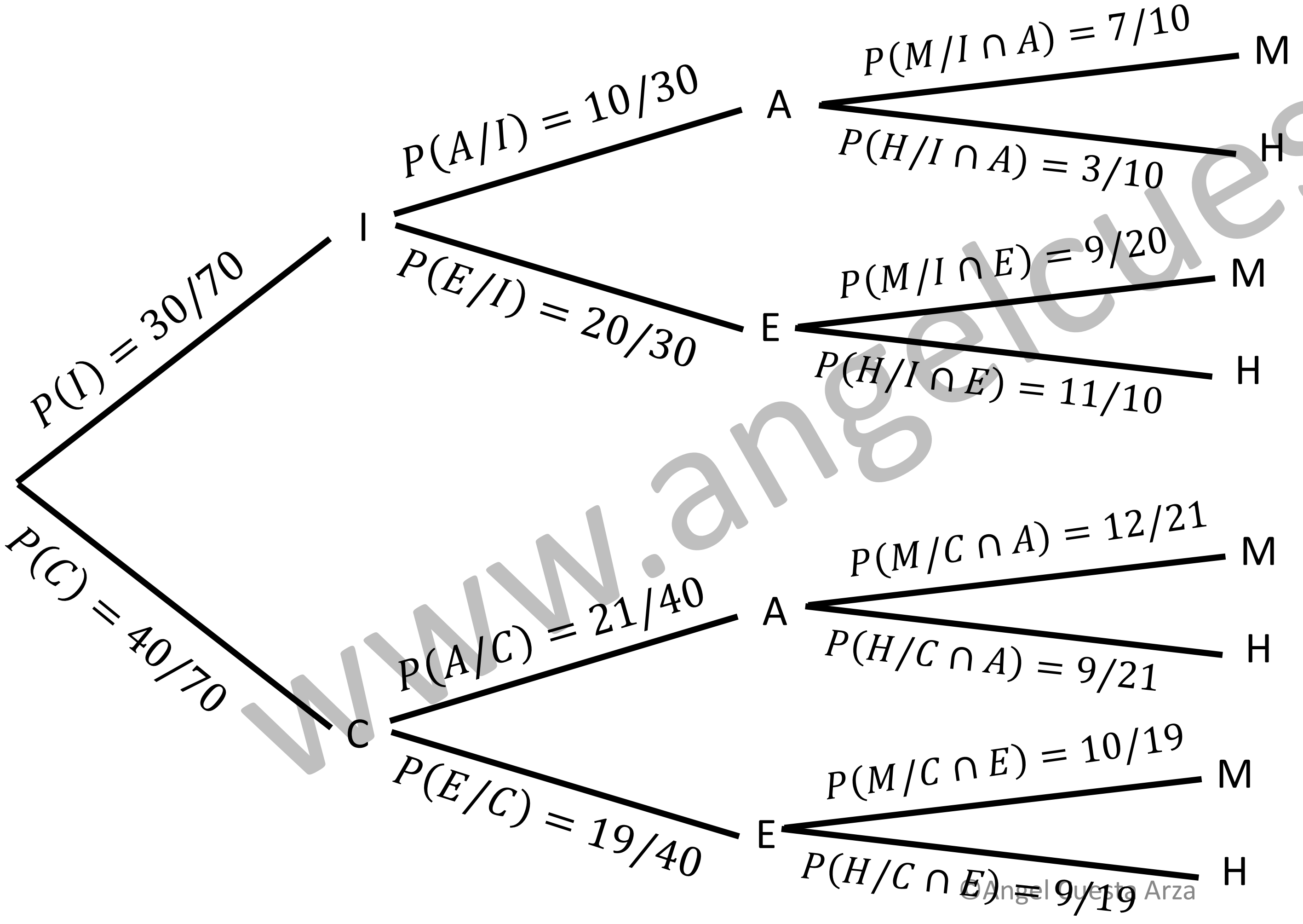
El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente



Problema 5

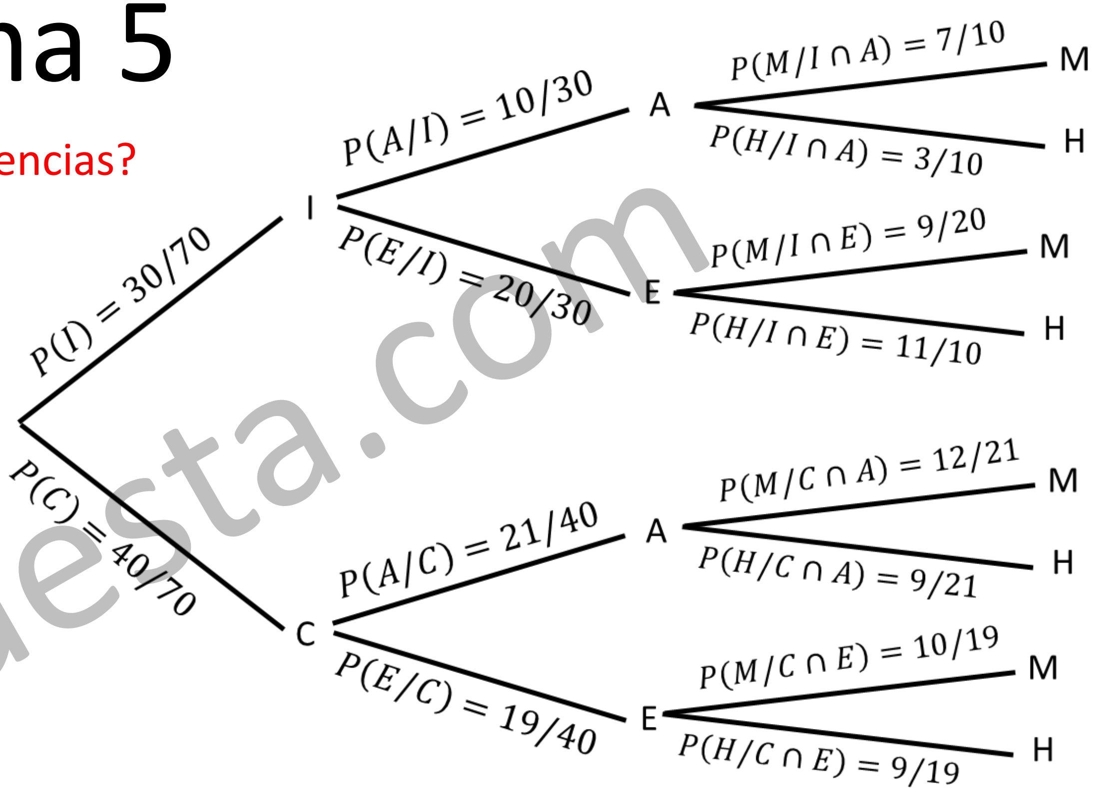
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente.



Problema 5

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?



Se calculan las probabilidades necesarias.

Primero, hombre americano, especialista en ciencias.

$$P(C \cap A \cap H) = P(C) \cdot P(A/C) \cdot P(H/C \cap A)$$

$$P(C \cap A \cap H) = \frac{40}{70} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{9}{21} = \frac{9}{70}$$

Ahora, hombre europeo, especialista en ciencias.

$$P(C \cap E \cap H) = P(C) \cdot P(E/C) \cdot P(H/C \cap E)$$

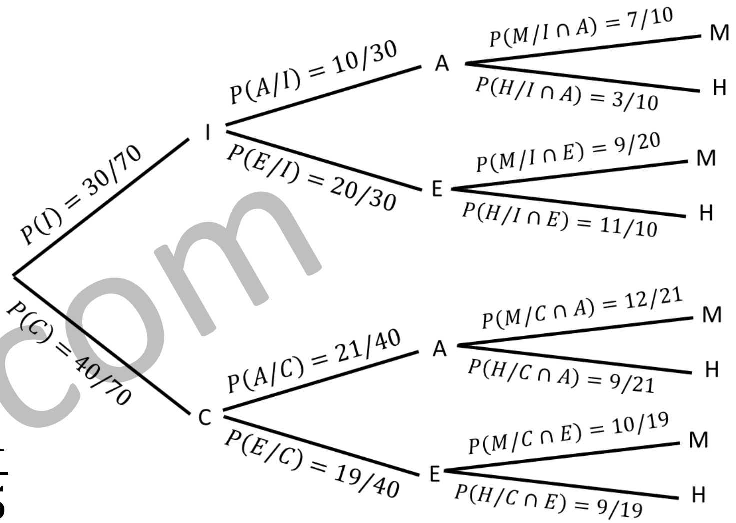
$$P(C \cap A \cap H) = \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{70}$$

Suman las probabilidades de las dos ramas que definen el suceso.

$$P(C \cap H) = P(C \cap A \cap H) + P(C \cap E \cap H) = \frac{9}{70} + \frac{9}{70} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$$

La probabilidad de el especialista sea hombre y especialista en ciencias es **9/35.**

Problema 5



c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

Para poder aplicar el teorema de Bayes calculo la probabilidad de que un especialista sea de ciencias y mujer.

$$P(C \cap M) = P(C \cap A \cap M) + P(C \cap E \cap M) = \frac{40}{70} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{12}{21} + \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{10}{19} = \frac{22}{70} = \frac{11}{35}$$

Y la probabilidad de que un especialista sea ingeniera y mujer.

$$P(I \cap M) = P(I \cap A \cap M) + P(I \cap E \cap M) = \frac{30}{70} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{7}{10} + \frac{30}{70} \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{9}{20} = \frac{22}{70} = \frac{8}{35}$$

Se aplica el teorema de Bayes.

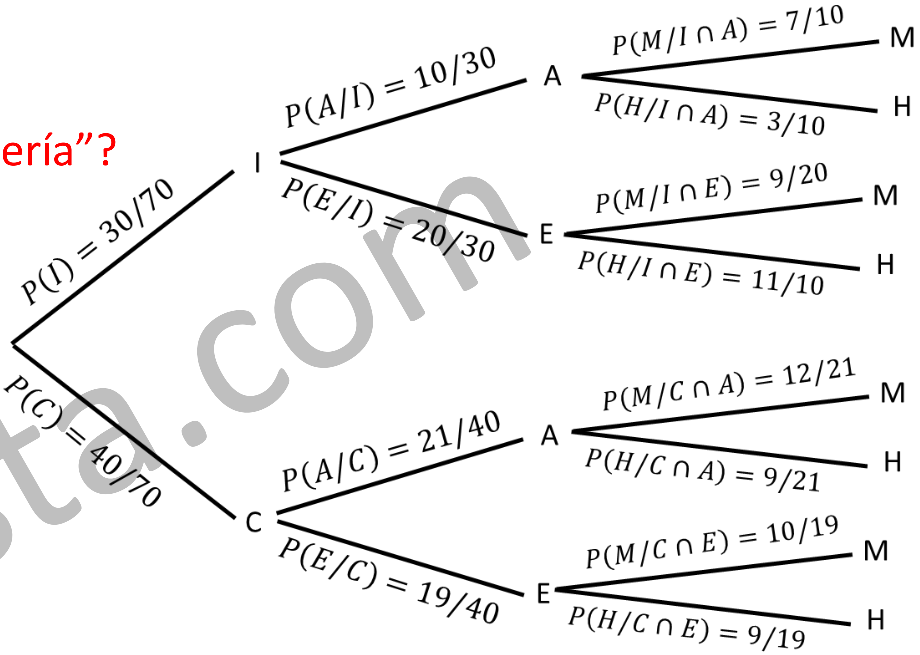
$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C \cap M)}{P(C \cap M) + P(I \cap M)} = \frac{\frac{11}{35}}{\frac{11}{35} + \frac{8}{35}} = \frac{11}{19}$$

$$P(I/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(I \cap M)}{P(C \cap M) + P(I \cap M)} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{11}{35} + \frac{8}{35}} = \frac{8}{19}$$

Es más probable que sea **especialista en ciencias** (11/19>8/19).

Problema 5

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”?



Se calculan ambas probabilidades .

$$P(M)=P(I\cap M)+P(C\cap M)=\frac{8}{35}+\frac{11}{35}=\frac{19}{35}$$

$$P(I)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$$

Ambos sucesos serán independientes si: $P(I\cap M)=P(I)\cdot P(M)$

Se comprueba si se verifica o no la igualdad. $P(I)\cdot P(M)=\frac{3}{7}\cdot\frac{19}{35}=\frac{57}{245}$

Como se calculó anteriormente: $P(I\cap M)=\frac{8}{35}$

Por lo tanto, los sucesos no son independientes ya que: $P(I\cap M)\neq P(I)\cdot P(M)$

Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas CC.SS
Julio 2023

Problema 6
Probabilidad

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

PAU Junio 2019

Problema 6

En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y C el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup C)$.

Solución: Se definen los sucesos: A=contrata compañía A B=contrata la compañía B

TP=contrata televisión de pago

Se construye el diagrama de árbol a partir de los datos. Como podréis comprobar a continuación, no disponemos de datos suficientes para obtener todas las probabilidades que hay en las ramas del árbol.

LEER SOLO APARTADO a) y EMPEZAR EL PROBLEMA

Problema 6

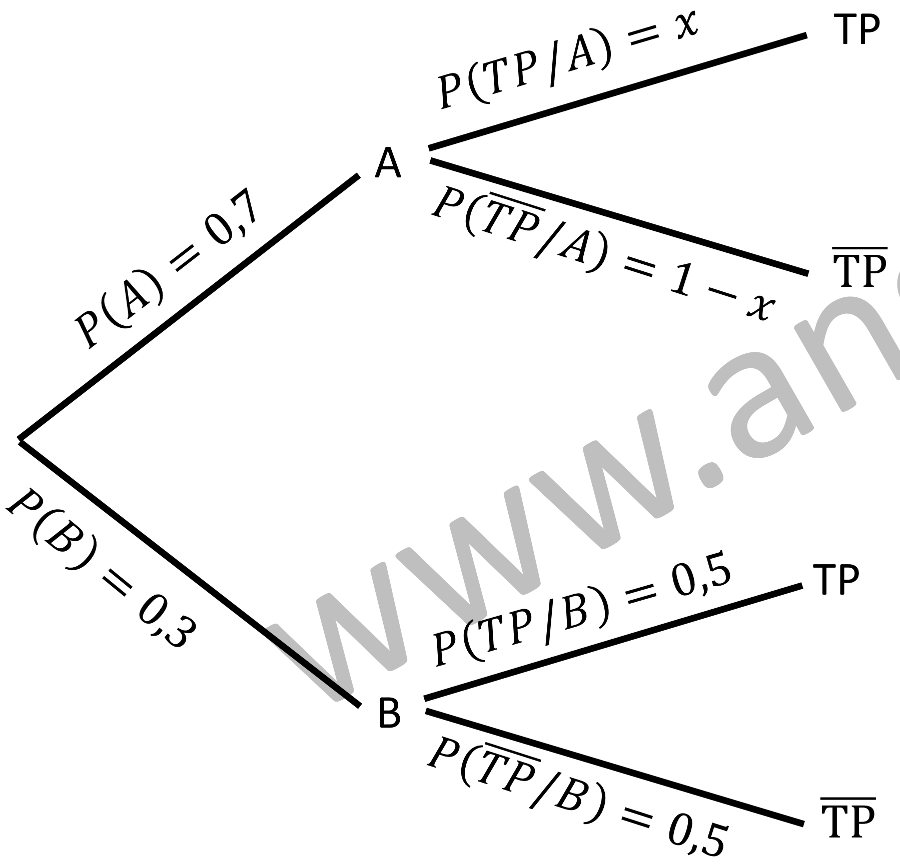
“La compañía A proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet.” $P(A) = 0{,}7$

Puesto que sólo hay dos compañías: $P(A) + P(B) = 1 \longrightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

“Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.” $P(TP/B) = 0{,}5$

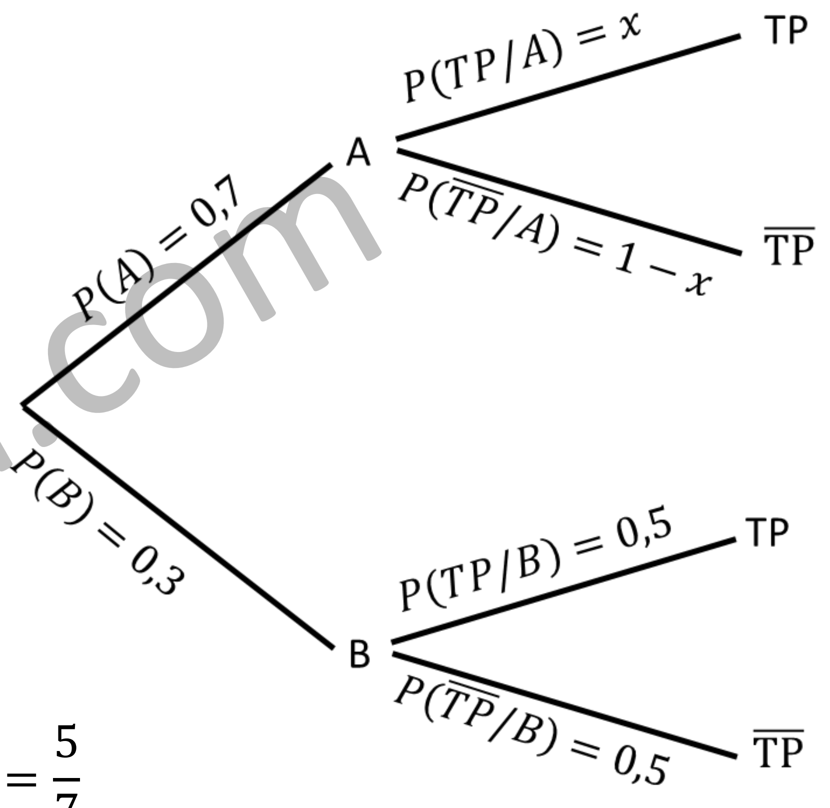
No nos dan ningún dato más que podamos poner en el diagrama de árbol, por eso: $P(TP/A) = x$

$P(\overline{TP}/A) = 1 - x$



Problema 6

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.



"El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago."

$$P(TP) = 0{,}65$$

Se aplica el teorema de la probabilidad total. Se despejará x.

$$P(TP) = P(A) \cdot P(TP/A) + P(B) \cdot P(TP/B)$$

$$0{,}65 = 0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \longrightarrow 0{,}65 = 0{,}7x + 0{,}15 \longrightarrow 0{,}7x = 0{,}5 \longrightarrow x = \frac{5}{7}$$

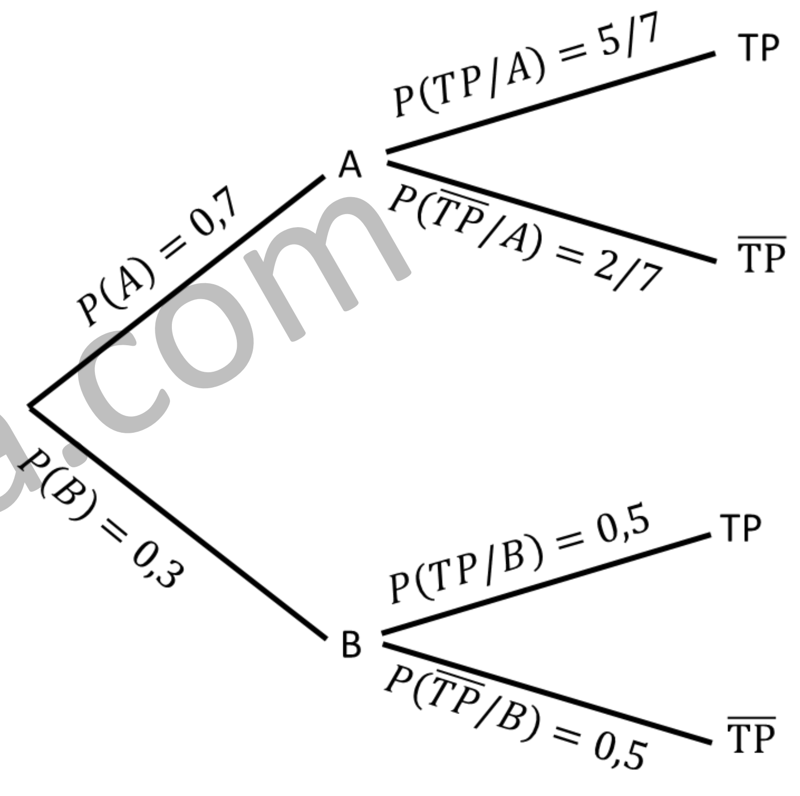
Calculo la probabilidad pedida.

$$P(A \cap \overline{TP}) = P(A) \cdot P(\overline{TP}/A) = 0{,}7 \cdot (1 - x) = 0{,}7 \cdot \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 0{,}7 \cdot \frac{2}{7} = 0{,}2$$

El porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A es del **20%**.

Problema 6

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?



Se aplica el teorema de Bayes.

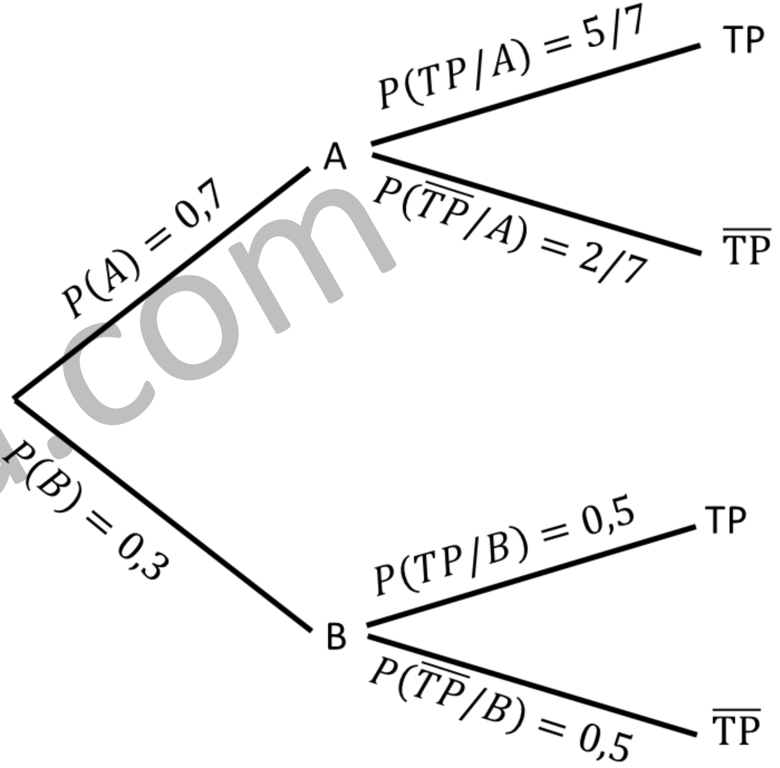
$$P(B/\overline{TP}) = \frac{P(B \cap \overline{TP})}{P(\overline{TP})} = \frac{P(B) \cdot P(\overline{TP}/B)}{P(A) \cdot P(\overline{TP}/A) + P(B) \cdot P(\overline{TP}/B)}$$

$$P(B/\overline{TP}) = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,7 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 0,5} = \frac{3}{7}$$

Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, la probabilidad de que sea cliente de la compañía B es **3/7**.

Problema 6

c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y C el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup C)$.



Tenemos en cuenta que el suceso C equivale al suceso TP

Se aplica la fórmula de la unión.

$$P(A \cup C) = P(A \cup TP) = P(A) + P(TP) - P(A \cap TP)$$

Recordamos que: $P(A) = 0{,}7 \quad P(TP) = 0{,}65$

Calculamos la probabilidad que nos falta.

$$P(A \cap TP) = P(A) \cdot P(TP/A) = 0{,}7 \cdot \frac{5}{7} = 0{,}5$$

Se sustituye en la fórmula de la unión.

$$P(A \cup C) = 0{,}7 + 0{,}65 - 0{,}5 = 0{,}85$$

La probabilidad pedida es: $\boldsymbol{P(A \cup C) = 0{,}85}$