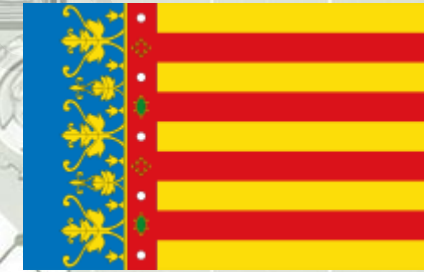


PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS Julio 2024



Problema 2 Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Analiza si la matriz $A \cdot B - 2 \cdot I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B .

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $C \cdot D = D \cdot C$

Solución: Se calcula en primer la matriz a analizar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Analiza si la matriz $A \cdot B - 2 \cdot I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. $A \cdot B - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante es distinto de cero. Desarrollo por adjuntos.

$$|A \cdot B - 2 \cdot I| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-6 - 4) = 30 \neq 0 \rightarrow \exists (A \cdot B - 2 \cdot I)^{-1}$$

Por lo tanto, la matriz $A \cdot B - 2 \cdot I$ es invertible.

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B .

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$A + 2XC = B^t \longrightarrow 2XC = B^t - A \longrightarrow XC = \frac{1}{2}(B^t - A) \longrightarrow XC \cdot C^{-1} = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

Para calcular X , debemos calcular previamente $B^t - A$ y C^{-1} .

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de C a continuación.

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B .

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(C))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $C^{-1} = \frac{1}{|C|} (Adj(C))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz X a continuación.

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B .

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz X a continuación.

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 2

Consideremos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $C \cdot D = D \cdot C$

Se realizan ambos productos y se igualan las matrices obtenidas.

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot z \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 + z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ -1 \cdot 3 + z \cdot 1 & -1 \cdot 1 + z \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 + z & -1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus elementos a_{ij} . $\begin{pmatrix} 2 & -3 + z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 + z & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ -3 + z = 1 \\ 1 = -3 + z \\ -1 = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{z = 4}$$

Solución: $z = 4$