

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS Julio 2024



Problema 3

Análisis de funciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



Problema 3

Dada la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$, se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$(3x^2 - 1)^2 = 0 \longrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{El Dominio de } f(x) \text{ es:}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje } Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \boxed{A = (0, 1)}$$

$$\text{Eje } X (y = 0) \rightarrow \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow \boxed{\text{No hay punto de corte con el eje } X}$$

Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$ es A.H. de $f(x)$

Problema 3

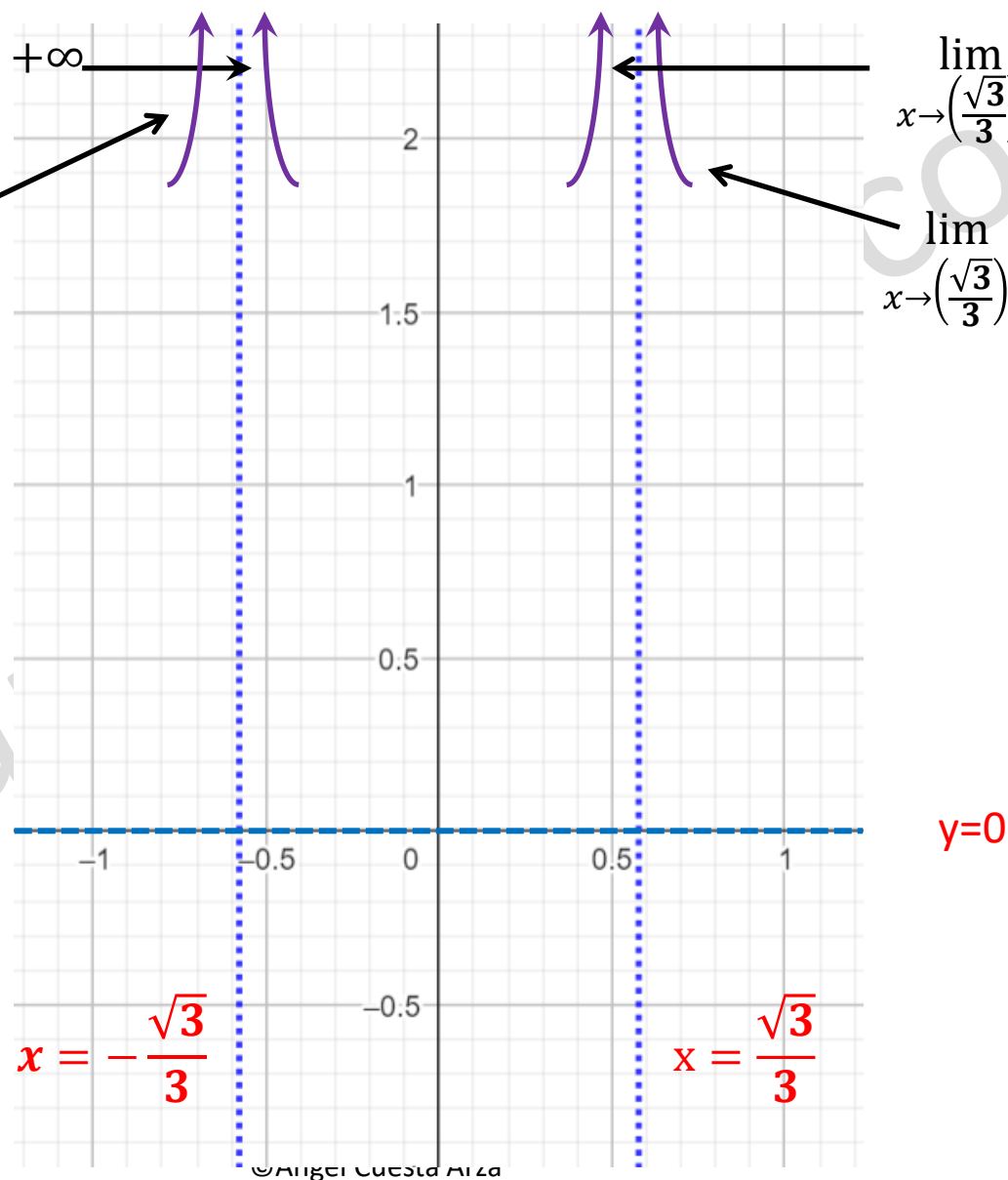
$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



Problema 3

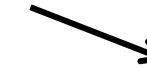
$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (3x^2 - 1)^2 - 1 \cdot 2 \cdot (3x^2 - 1) \cdot 6x}{[(3x^2 - 1)^2]^2} = \frac{-12x \cdot (3x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero:
$$\frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3} = 0 \longrightarrow -12x = 0 \longrightarrow x = 0$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	
$f(x)$					

$$f'(0,2) > 0$$

$$f'(1) < 0$$

$$f'(-0,2) < 0$$

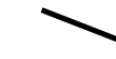
$$f'(-1) > 0$$

$f(x)$ es **creciente** si $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y **decreciente** si $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Problema 3

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	
$f(x)$					

Se observa en el cuadro que la función solo tiene un mínimo relativo en $x=0$. Fíjate que no tiene máximos relativos porque el cambio de tendencia en la monotonía en la cual podríamos pensar que la función presenta máximos relativos se produce para valores de x en los cuales la función no está definida.

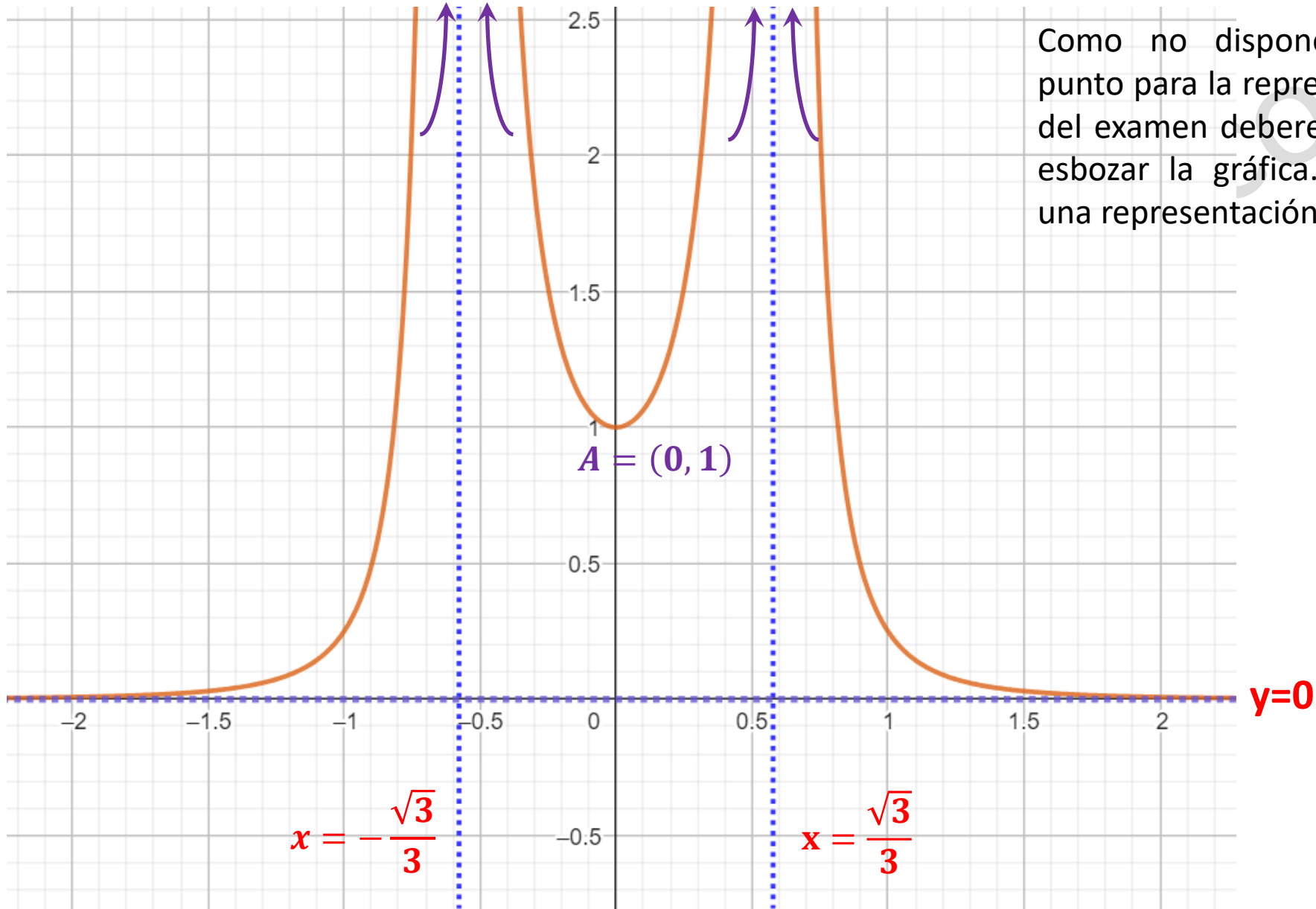
Se sustituye el único valor obtenido en la función para obtener las coordenadas del mínimo relativo.

$$f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = 1$$

Las coordenadas del mínimo relativo son: $A = (0, 1)$

Dicho punto lo habíamos obtenido anteriormente ya que es el punto de corte con el eje Y.

PROBLEMA 3



Como no disponemos de casi ningún punto para la representación gráfica, el día del examen deberemos conformarnos con esbozar la gráfica. Es imposible obtener una representación gráfica precisa.