

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS
Julio 2024



Problema 4

Optimización de funciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



Problema 4

Un agricultor estima que, si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $I(x) = -x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

Solución:

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice. Resolveré este primer apartado de dos formas diferentes. Vamos con la primera.

$$I(x) = -x^2 + 60x + 100 \quad \text{Siendo: } a = -1; b = 60; c = 100$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-60}{2 \cdot (-1)} = 30$$

La cantidad de abono que maximiza los ingresos son 30 kg.

Para calcular el máximo ingreso, se sustituye en la función $x = 30$.

$$I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$$

El ingreso máximo será de 1000 euros.

Problema 4

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas (recomendable en PAU). $I(x) = -x^2 + 60x + 100$

$$I'(x) = -2x + 60$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local. $-2x + 60 = 0 \longrightarrow x = 30 \text{ kg de abono}$

Para comprobar que, en $x = 30$, $I(x)$ presenta un máximo relativo, aplicaré el criterio de la segunda derivada.

NOTA: También se puede llevar a cabo un estudio de signos de la primera derivada.

Se calcula ahora la segunda derivada. $I''(x) = -2$

Se sustituye en $x = 30$ $I''(30) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en $x = 30$ hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente. El valor del máximo beneficio ya se ha calculado anteriormente.

La cantidad de abono que maximiza los ingresos son 30 kg.

El ingreso máximo será de 1000 euros.

Problema 4

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

Se define la relación funcional entre el coste del abono y los kilos de abono empleados. $C(x) = 12x$

Se define la función beneficios como ingresos menos costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$$

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice. Resolveré este segundo apartado de dos formas diferentes (igual que en el apartado a)).

$$B(x) = -x^2 + 48x + 100 \quad \text{Siendo: } a = -1; b = 48; c = 100$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-48}{2 \cdot (-1)} = 24$$

La cantidad de abono que maximiza los beneficios son 24 kg.

Para calcular el máximo beneficio se sustituye en la función $x = 24$.

$$B(24) = -(24)^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$$

El beneficio máximo será de 676 euros.

Problema 4

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas (recomendable en PAU). $B(x) = -x^2 + 48x + 100$

$$B'(x) = -2x + 48$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local. $-2x + 48 = 0 \longrightarrow x = 24 \text{ Kg de abono}$

Para comprobar que, en $x = 24$, $B(x)$ presenta un máximo relativo, aplicaré el criterio de la segunda derivada.

NOTA: También se puede llevar a cabo un estudio de signos de la primera derivada.

Se calcula ahora la segunda derivada. $B''(x) = -2$

Se sustituye en $x = 24$ $B''(24) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en $x = 24$ hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente. El valor del máximo beneficio ya se ha calculado anteriormente.

La cantidad de abono que maximiza los beneficios son 24 kg.

El beneficio máximo será de 676 euros.

Problema 4

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? $B(x) = -x^2 + 48x + 100$

Se resuelve la inecuación correspondiente. $-x^2 + 48x + 100 > 0$

En primer lugar, se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \longrightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 100}}{2 \cdot (-1)} \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 50 \end{cases}$$

Se hace un estudio de signos, teniendo en cuenta que $x > 0$.

$$B(1) = -(1)^2 + 48 \cdot 1 + 100 = 147 > 0 \quad B(100) = -(100)^2 + 48 \cdot 100 + 100 = -5100 < 0$$

x	0	50	$+\infty$
B(x)		+	-

BENEFICIOS

Para que la empresa sea rentable, debe utilizar como máximo **50 kg de abono**.

Expresado en forma de intervalo: $x \in [0, 50)$