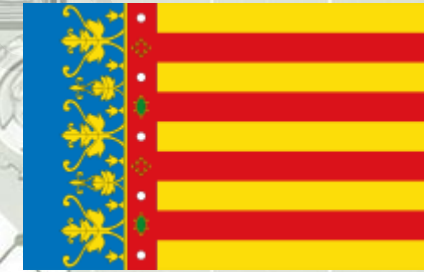


PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS  
Julio 2024



Problema 1

Programación lineal

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



# PROBLEMA 1

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2 500 unidades de tinta y de 3 000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias?

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas?

**Solución:** En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

$x$ =número de bolígrafos del modelo sencillo.  
 $y$ =número de bolígrafos del modelo sofisticado.

|                                             |     | Uds de tinta | Uds de plástico | Beneficio  |
|---------------------------------------------|-----|--------------|-----------------|------------|
| número de bolígrafos del modelo sencillo    | $x$ | $x$          | $x$             | $0,5x$ (€) |
| número de bolígrafos del modelo sofisticado | $y$ | $y$          | $1,5y$          | $0,7y$ (€) |

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

# PROBLEMA 1

|                                             |   | Uds de tinta | Uds de plástico | Beneficio |
|---------------------------------------------|---|--------------|-----------------|-----------|
| número de bolígrafos del modelo sencillo    | x | x            | x               | 0,5x (€)  |
| número de bolígrafos del modelo sofisticado | y | y            | 1,5y            | 0,7y (€)  |

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

|                                                                       |   |                      |
|-----------------------------------------------------------------------|---|----------------------|
| “Dispone de 2 500 unidades de tinta”                                  | → | $x + y \leq 2500$    |
| “...y de 3 000 de plástico”                                           | → | $x + 1,5y \leq 3000$ |
| “no se pueden fabricar más de 2 000 unidades de bolígrafos sencillos” | → | $x \leq 2000$        |
| “restricciones triviales”                                             | → | $x \geq 0; y \geq 0$ |

La función objetivo está definida por el beneficio:  $z = 0,5x + 0,7y$

# PROBLEMA 1

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

**Maximizar :  $z = 0,5x + 0,7y$**

$$s. a. \begin{cases} x + y \leq 2500 \\ x + 1,5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

**(a)**  $x + y \leq 2500$

Expreso la recta:  $x + y = 2500$

Se dan valores para representar:

| x    | y    |
|------|------|
| 0    | 2500 |
| 2500 | 0    |

Compruebo si (0,0) pertenece a la solución  
sustituyendo en la inecuación

**$0 + 0 \leq 2500 \rightarrow$  Si Cumple;  $(0, 0) \in \{x + y \leq 2500\}$**

**(b)**  $x + 1,5y \leq 3000$

Expreso la recta:  $x + 1,5y = 3000$

Se dan valores para representar:

| x    | y    |
|------|------|
| 0    | 2000 |
| 3000 | 0    |

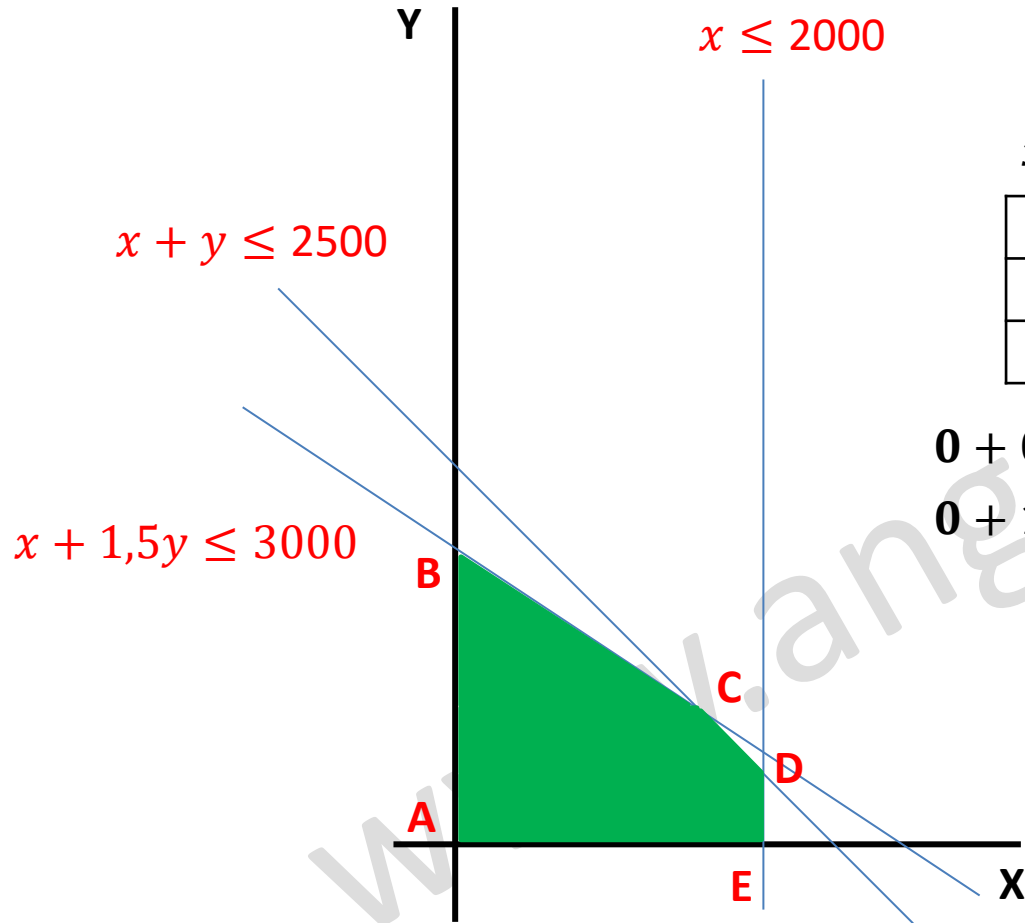
Compruebo si (0,0) pertenece a la solución  
sustituyendo en la inecuación

**$0 + 1,5 \cdot 0 \leq 3000 \rightarrow$  Si Cumple;  $(0, 0) \in \{x + 1,5y \leq 3000\}$**

# PROBLEMA 1

Representamos las inecuaciones y observamos cual es la región factible.

$$s. a. \begin{cases} x + y \leq 2500 \\ x + 1,5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



$$x + y = 2500$$

| x    | y    |
|------|------|
| 0    | 2500 |
| 2500 | 0    |

$$x + 1,5y = 3000$$

| x    | y    |
|------|------|
| 0    | 2000 |
| 3000 | 0    |

$$0 + 0 \leq 2500; (0, 0) \in \{x + y \leq 2500\}$$

$$0 + 1,5 \cdot 0 \leq 3000; (0, 0) \in \{x + 1,5y \leq 3000\}$$

# PROBLEMA 1

Para calcular las coordenadas de los vértices C y D, se deben resolver los sistemas de ecuaciones formados por las rectas que dan lugar a dichos vértices. Los vértices A, B y E, no hace falta calcularlos porque ya disponemos de sus coordenadas.

**Vértice C:** 
$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x + 1,5y = 3000 \end{cases}$$

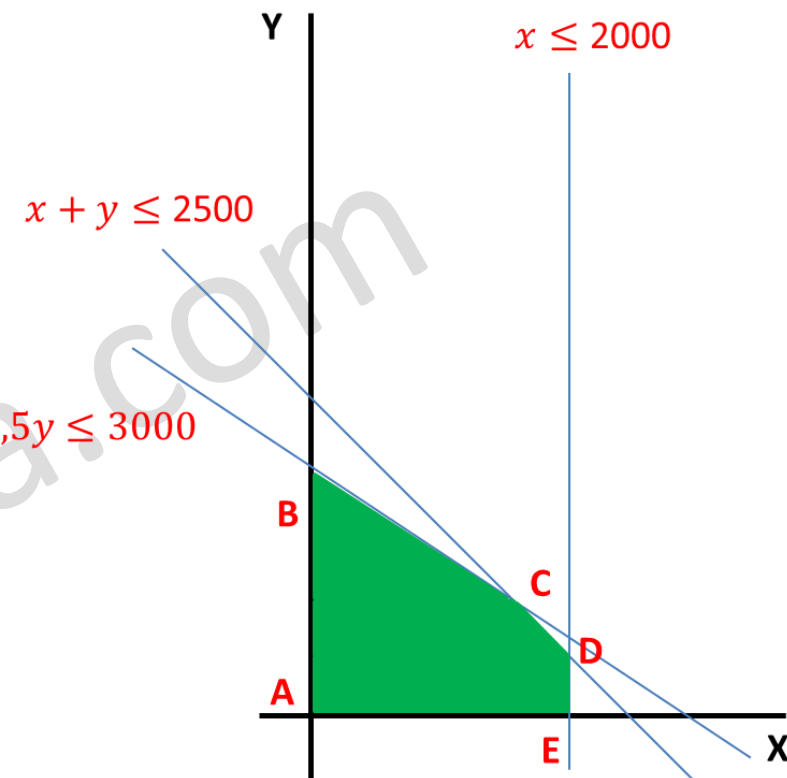
Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2500 & 1 \\ 3000 & 1,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,5 \end{vmatrix}} = \frac{750}{0,5} = 1500 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2500 \\ 1 & 3000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1,5 \end{vmatrix}} = \frac{500}{0,5} = 1000$$

Las coordenadas del vértice C son: **C = (1500, 1000)**

**Vértice D:** 
$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x = 2000 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2000 \\ y = 500 \end{cases}$$

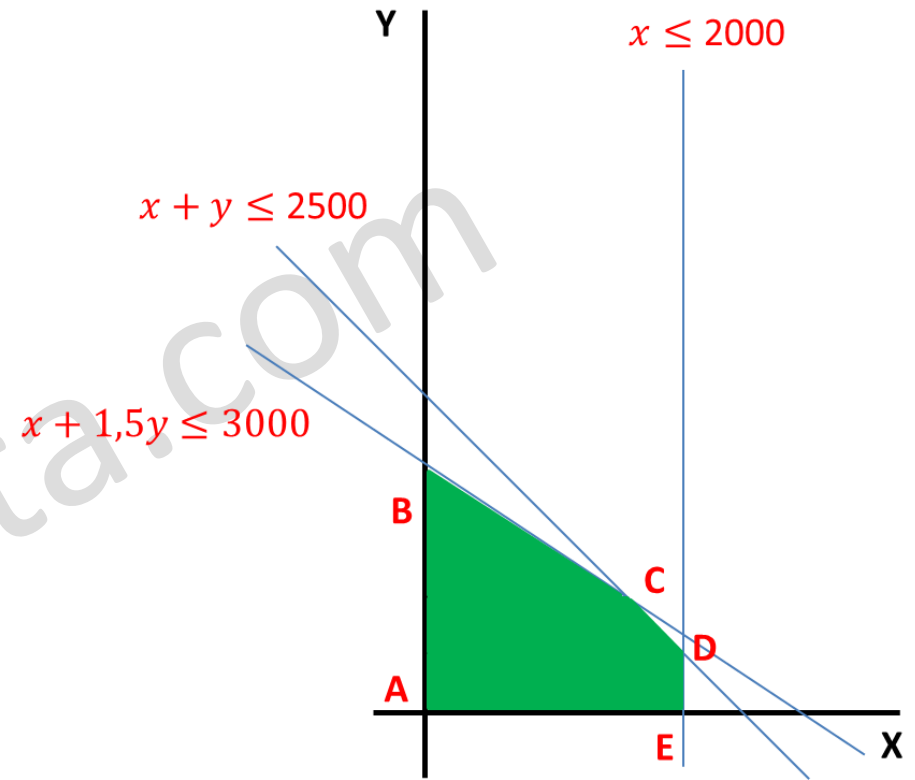
Las coordenadas del vértice D son: **D = (2000, 500)**



# PROBLEMA 1

El máximo de la función  $z$  en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculemos los valores de la función en los vértices.

| x    | y    | $z = 0,5x + 0,7y$                                  |
|------|------|----------------------------------------------------|
| 0    | 0    | $0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 = 0$                    |
| 0    | 2000 | $0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 2000 = 1400$              |
| 1500 | 1000 | $0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000 = 1450$ (máximo). |
| 2000 | 500  | $0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 500 = 1350$            |
| 2000 | 0    | $0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 0 = 1000$              |



# PROBLEMA 1

**Solución:** debe producir **1500 bolígrafos sencillos y 1000 bolígrafos sofisticados**. Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el beneficio (máximo) será de **1450 euros**.

| x    | y    | $z = 0,5x + 0,7y$                                  |
|------|------|----------------------------------------------------|
| 0    | 0    | $0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 = 0$                    |
| 0    | 2000 | $0,5 \cdot 0 + 0,7 \cdot 2000 = 1400$              |
| 1500 | 1000 | $0,5 \cdot 1500 + 0,7 \cdot 1000 = 1450$ (máximo). |
| 2000 | 500  | $0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 500 = 1350$            |
| 2000 | 0    | $0,5 \cdot 2000 + 0,7 \cdot 0 = 1000$              |

# PAU Comunidad Valenciana



## Matemáticas CC.SS Julio 2024



### Problema 2

### Álgebra matricial

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Analiza si la matriz  $A \cdot B - 2 \cdot I$  es invertible, siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.

b) Determina la matriz  $X$  que es solución de la ecuación  $A + 2XC = B^t$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de la matriz  $B$ .

c) Calcula para qué valores de  $z$  la matriz  $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$  cumple la condición  $C \cdot D = D \cdot C$

**Solución:** Se calcula en primer la matriz a analizar.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Analiza si la matriz  $A \cdot B - 2 \cdot I$  es invertible, siendo  $I$  la matriz identidad de orden 3.  $A \cdot B - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante es distinto de cero. Desarrollo por adjuntos.

$$|A \cdot B - 2 \cdot I| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-6 - 4) = 30 \neq 0 \rightarrow \exists (A \cdot B - 2 \cdot I)^{-1}$$

Por lo tanto, la matriz  $A \cdot B - 2 \cdot I$  es invertible.

# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz  $X$  que es solución de la ecuación  $A + 2XC = B^t$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de la matriz  $B$ .

Se despeja  $X$  aplicando las propiedades de las matrices.

$$A + 2XC = B^t \longrightarrow 2XC = B^t - A \longrightarrow XC = \frac{1}{2}(B^t - A) \longrightarrow XC \cdot C^{-1} = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

Para calcular  $X$ , debemos calcular previamente  $B^t - A$  y  $C^{-1}$ .

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de  $C$  a continuación.

# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz  $X$  que es solución de la ecuación  $A + 2XC = B^t$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de la matriz  $B$ .

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante:  $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0 \rightarrow \exists C^{-1}$

2) Matriz de los adjuntos:  $Adj(C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta:  $(Adj(C))^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa:  $C^{-1} = \frac{1}{|C|} (Adj(C))^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Se calcula la matriz  $X$  a continuación.

# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Determina la matriz  $X$  que es solución de la ecuación  $A + 2XC = B^t$ , siendo  $B^t$  la matriz traspuesta de la matriz  $B$ .

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz  $X$  a continuación.

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \\ 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución:**  $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

# Problema 2

Consideremos las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcula para qué valores de  $z$  la matriz  $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$  cumple la condición  $C \cdot D = D \cdot C$

Se realizan ambos productos y se igualan las matrices obtenidas.

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot z \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 + z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ -1 \cdot 3 + z \cdot 1 & -1 \cdot 1 + z \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 + z & -1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando lo son todos sus elementos  $a_{ij}$ .  $\begin{pmatrix} 2 & -3 + z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 + z & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ -3 + z = 1 \\ 1 = -3 + z \\ -1 = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{z = 4}$$

**Solución:  $z = 4$**

# PAU Comunidad Valenciana



## Matemáticas CC.SS Julio 2024



### Problema 3

### Análisis de funciones

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.  
8 ejercicios.  
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



# Problema 3

Dada la función  $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$ , se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Los máximos y mínimos locales, si existen.
- e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

## Solución:

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$(3x^2 - 1)^2 = 0 \longrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{El Dominio de } f(x) \text{ es:}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje } Y (x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = \frac{1}{1} = 1 \rightarrow \boxed{A = (0, 1)}$$

$$\text{Eje } X (y = 0) \rightarrow \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow 1 = 0 \rightarrow \boxed{\text{No hay punto de corte con el eje } X}$$

# Problema 3

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

# Problema 3

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

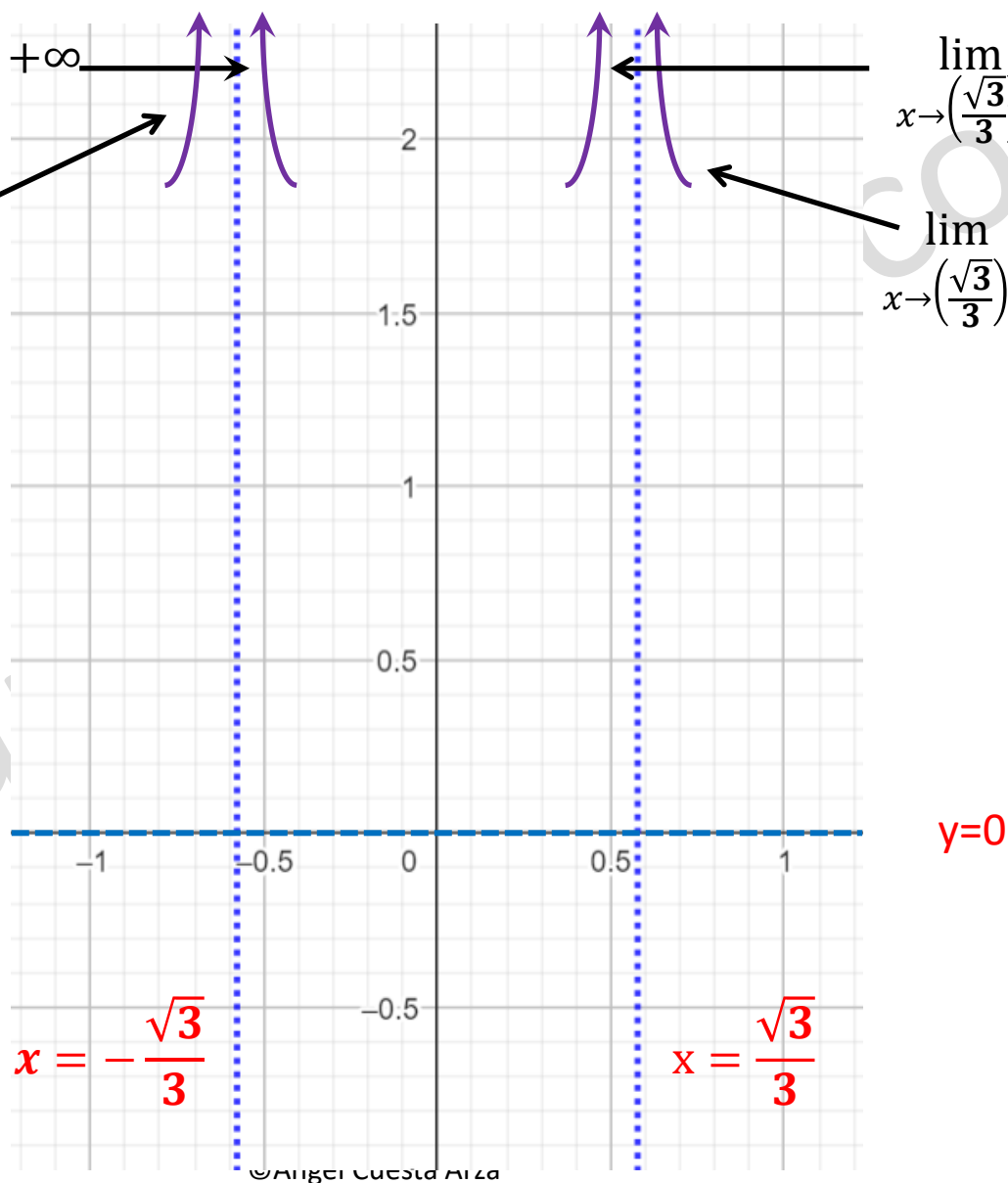
*Por lo tanto,  $y = 0$  es A.H. de  $f(x)$*

# Problema 3

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} \frac{1}{(3x^2 - 1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Si representamos las asíntotas, con la información que tenemos, quedaría la gráfica de forma provisional de la siguiente manera.



# Problema 3

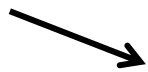
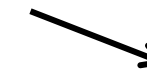
$$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada. 
$$f'(x) = \frac{0 \cdot (3x^2 - 1)^2 - 1 \cdot 2 \cdot (3x^2 - 1) \cdot 6x}{[(3x^2 - 1)^2]^2} = \frac{-12x \cdot (3x^2 - 1)}{(3x^2 - 1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero: 
$$\frac{-12x}{(3x^2 - 1)^3} = 0 \longrightarrow -12x = 0 \longrightarrow x = 0$$

Se estudia el signo de la derivada:

|         |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|         | $-\infty$                                                                           | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$                                                               | 0                                                                                   | $\frac{\sqrt{3}}{3}$                                                                | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                   | -                                                                                   | +                                                                                   | -                                                                                   |           |
| $f(x)$  |  |  |  |  |           |

$$f'(0,2) > 0$$

$$f'(1) < 0$$

$$f'(-0,2) < 0$$

$$f'(-1) > 0$$

$f(x)$  es **creciente** si  $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  y **decreciente** si  $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

# Problema 3

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de  $x$  en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

|         |                                                                                    |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|         | $-\infty$                                                                          | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$                                                               | $0$                                                                                 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$                                                                | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +                                                                                  | -                                                                                   | +                                                                                   | -                                                                                   |           |
| $f(x)$  |  |  |  |  |           |

Se observa en el cuadro que la función solo tiene un mínimo relativo en  $x=0$ . Fíjate que no tiene máximos relativos porque el cambio de tendencia en la monotonía en la cual podríamos pensar que la función presenta máximos relativos se produce para valores de  $x$  en los cuales la función no está definida.

Se sustituye el único valor obtenido en la función para obtener las coordenadas del mínimo relativo.

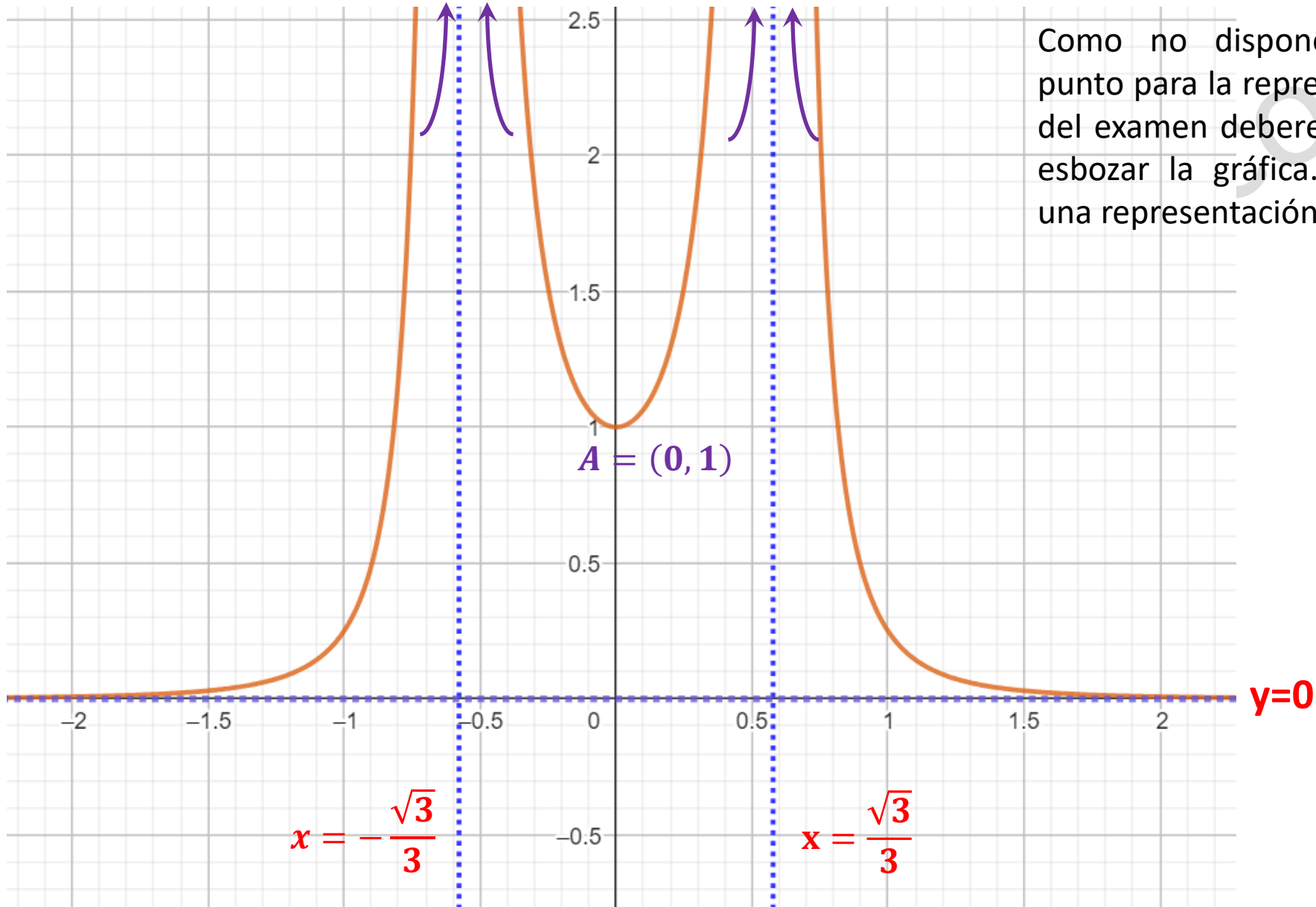
$$f(0) = \frac{1}{(3 \cdot 0^2 - 1)^2} = 1$$

Las coordenadas del mínimo relativo son:  $A = (0, 1)$

Dicho punto lo habíamos obtenido anteriormente ya que es el punto de corte con el eje Y.

# PROBLEMA 3

Como no disponemos de casi ningún punto para la representación gráfica, el día del examen deberemos conformarnos con esbozar la gráfica. Es imposible obtener una representación gráfica precisa.



PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas CC.SS  
Julio 2024



Problema 4

Optimización de funciones

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



# Problema 4

Un agricultor estima que, si aplica  $x$  kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán  $I(x) = -x^2 + 60x + 100$  euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

**Solución:**

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice. Resolveré este primer apartado de dos formas diferentes. Vamos con la primera.

$$I(x) = -x^2 + 60x + 100 \quad \text{Siendo: } a = -1; b = 60; c = 100$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-60}{2 \cdot (-1)} = 30$$

**La cantidad de abono que maximiza los ingresos son 30 kg.**

Para calcular el máximo ingreso, se sustituye en la función  $x = 30$ .

$$I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$$

**El ingreso máximo será de 1000 euros.**

# Problema 4

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas (recomendable en PAU).  $I(x) = -x^2 + 60x + 100$

$$I'(x) = -2x + 60$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local.  $-2x + 60 = 0 \longrightarrow x = 30 \text{ kg de abono}$

Para comprobar que, en  $x = 30$ ,  $I(x)$  presenta un máximo relativo, aplicaré el criterio de la segunda derivada.

NOTA: También se puede llevar a cabo un estudio de signos de la primera derivada.

Se calcula ahora la segunda derivada.  $I''(x) = -2$

Se sustituye en  $x = 30$   $I''(30) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en  $x = 30$  hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente. El valor del máximo beneficio ya se ha calculado anteriormente.

**La cantidad de abono que maximiza los ingresos son 30 kg.**

**El ingreso máximo será de 1000 euros.**

# Problema 4

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

Se define la relación funcional entre el coste del abono y los kilos de abono empleados.  $C(x) = 12x$

Se define la función beneficios como ingresos menos costes.

$$B(x) = I(x) - C(x) = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$$

Puesto que la función es cuadrática y el coeficiente del término cuadrático es negativo, sabemos que el máximo está en el vértice. Resolveré este segundo apartado de dos formas diferentes (igual que en el apartado a) ).

$$B(x) = -x^2 + 48x + 100 \quad \text{Siendo: } a = -1; b = 48; c = 100$$

$$v_x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow v_x = \frac{-48}{2 \cdot (-1)} = 24$$

**La cantidad de abono que maximiza los beneficios son 24 kg.**

Para calcular el máximo beneficio se sustituye en la función  $x = 24$ .

$$B(24) = -(24)^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$$

**El beneficio máximo será de 676 euros.**

# Problema 4

También se podría haber resuelto el ejercicio con ayuda de las derivadas (recomendable en PAU).  $B(x) = -x^2 + 48x + 100$

$$B'(x) = -2x + 48$$

Se iguala a cero para obtener el óptimo local.  $-2x + 48 = 0 \longrightarrow x = 24 \text{ Kg de abono}$

Para comprobar que, en  $x = 24$ ,  $B(x)$  presenta un máximo relativo, aplicaré el criterio de la segunda derivada.

NOTA: También se puede llevar a cabo un estudio de signos de la primera derivada.

Se calcula ahora la segunda derivada.  $B''(x) = -2$

Se sustituye en  $x = 24$   $B''(24) = -2 < 0$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en  $x = 24$  hay un máximo relativo, tal como habíamos calculado anteriormente. El valor del máximo beneficio ya se ha calculado anteriormente.

**La cantidad de abono que maximiza los beneficios son 24 kg.**

**El beneficio máximo será de 676 euros.**

# Problema 4

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos?  $B(x) = -x^2 + 48x + 100$

Se resuelve la inecuación correspondiente.  $-x^2 + 48x + 100 > 0$

En primer lugar, se resuelve la ecuación de segundo grado.

$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \longrightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 100}}{2 \cdot (-1)} \longrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 50 \end{cases}$$

Se hace un estudio de signos, teniendo en cuenta que  $x > 0$ .

$$B(1) = -(1)^2 + 48 \cdot 1 + 100 = 147 > 0 \quad B(100) = -(100)^2 + 48 \cdot 100 + 100 = -5100 < 0$$

|      |   |    |           |
|------|---|----|-----------|
| x    | 0 | 50 | $+\infty$ |
| B(x) |   | +  | -         |

BENEFICIOS

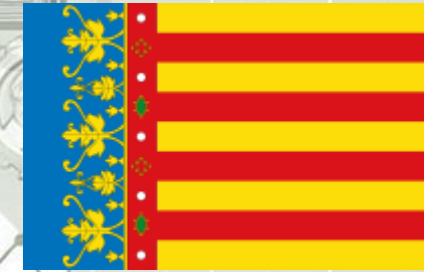
Para que la empresa sea rentable, debe utilizar como máximo **50 kg de abono**.

Expresado en forma de intervalo:  $x \in [0, 50)$

# PAU Comunidad Valenciana



## Matemáticas CC.SS Julio 2024



### Problema 5 Probabilidad

# VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Curso de repaso de  
probabilidad básica



Álgebra de conjuntos.  
Fórmulas de la probabilidad.



Teorema de la probabilidad  
total y teorema de Bayes



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PAU Junio 2019

# Problema 5

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

- a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.
- b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?
- c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”?

**Solución:** Se definen los sucesos:  $F=\{\text{Escoge fútbol}\}$   $E=\{\text{El alumno curso la ESO}\}$   
 $B=\{\text{Escoge baloncesto}\}$   $BA=\{\text{El alumno cursa bachillerato}\}$   
 $M=\{\text{Escoge música}\}$   $D=\{\text{El alumno escoge una actividad deportiva}\}$

Para resolver el primer apartado se utilizará una tabla de contingencia. La forma en la que nos han proporcionado los datos nos indica que no es posible trabajar con un diagrama de árbol. Tampoco parece fácil trabajar con fórmulas, y dado que cada estudiante sólo puede elegir una actividad y sólo puede cursar una etapa educativa, lo mejor es recurrir a la **tabla de contingencia**.

# Problema 5

“...El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música.”

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.

Se construye la tabla de contingencia.

|              | Fútbol | Baloncesto | Música | Total |
|--------------|--------|------------|--------|-------|
| ESO          | 230    | 60         | 20     | 310   |
| Bachillerato | 70     | 12         | 8      | 90    |
| Total        | 300    | 72         | 28     | 400   |

# Problema 5

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.

Se marcan en la tabla los sucesos que representan la unión y se aplica la regla de Laplace. También podría utilizarse la fórmula, pero no es imprescindible en este caso.

|              | Fútbol | Baloncesto | Música | Total |
|--------------|--------|------------|--------|-------|
| ESO          | 230    | 60         | 20     | 310   |
| Bachillerato | 70     | 12         | 8      | 90    |
| Total        | 300    | 72         | 28     | 400   |

$$P(E \cup M) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{230 + 60 + 20 + 8}{400} = \frac{318}{400} = 0,795$$

La probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música” es **0,795**.

# Problema 5

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Para calcular la probabilidad condicionada, también utilizaremos la tabla de contingencia.

|              | Fútbol | Baloncesto | Música | Total |
|--------------|--------|------------|--------|-------|
| ESO          | 230    | 60         | 20     | 310   |
| Bachillerato | 70     | 12         | 8      | 90    |
| Total        | 300    | 72         | 28     | 400   |

$$P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{230 + 60}{400}}{\frac{300 + 72}{400}} = \frac{290}{372} = \frac{145}{186} \approx 0,7796$$

Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, la probabilidad de que esté en ESO es, aproximadamente, **0,7796**.

# Problema 5

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”?

Dos sucesos son independientes si verifican una de las siguientes igualdades: 
$$\begin{cases} P(BA \cap \bar{B}) = P(BA) \cdot P(\bar{B}) \\ P(BA/\bar{B}) = P(BA) \end{cases}$$

En este caso, considero que es más sencillo hacer los cálculos con la primera de las expresiones.

$$P(BA \cap \bar{B}) = \frac{70 + 8}{400} = \frac{78}{400} = \frac{39}{200} = 0,195$$

$$P(BA) = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{300 + 28}{400} = \frac{328}{400} = 0,82$$

|              | Fútbol | Baloncesto | Música | Total |
|--------------|--------|------------|--------|-------|
| ESO          | 230    | 60         | 20     | 310   |
| Bachillerato | 70     | 12         | 8      | 90    |
| Total        | 300    | 72         | 28     | 400   |

Podemos comprobar que la expresión no se verifica:  $0,195 \neq \frac{9}{40} \cdot 0,82 \longrightarrow 0,195 \neq 0,1845$

Los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto” **NO SON INDEPENDIENTES.**

# PAU Comunidad Valenciana



## Matemáticas CC.SS Julio 2024



### Problema 6 Probabilidad

# VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Curso de repaso de  
probabilidad básica



Álgebra de conjuntos.  
Fórmulas de la probabilidad.



Teorema de la probabilidad  
total y teorema de Bayes



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PAU Junio 2019

# Problema 6

Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

- a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.
- b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.
- c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”.

**Solución:** Se definen los sucesos:  $A = \{\text{Res vacunada con el método A}\}$     $R = \{\text{Tiene problemas respiratorios}\}$ .

$B = \{\text{Res vacunada con el método B}\}$     $\bar{R} = \{\text{No tiene problemas respiratorios}\}$ .

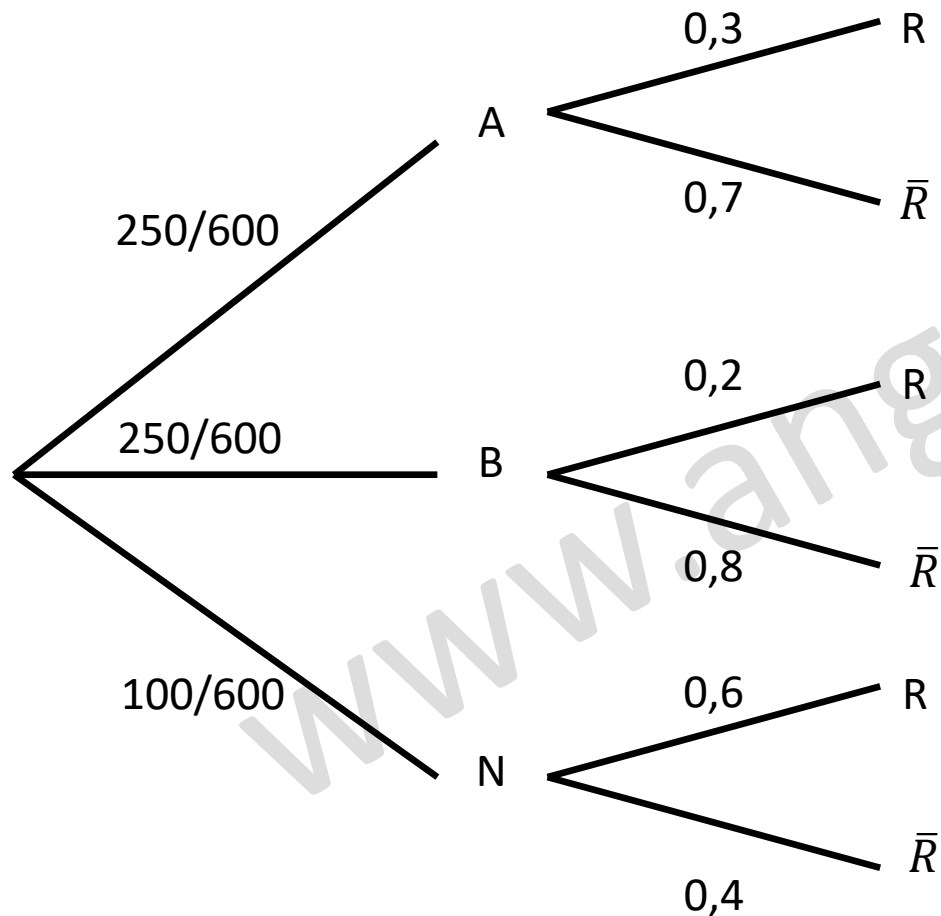
$N = \{\text{Res no vacunada}\}$ .

Se plantea el **diagrama de árbol** correspondiente para plantear el problema.

También podría plantearse una **tabla de contingencia**.

# Problema 6

“... de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas...”



|              | A               | B               | N               | TOTAL |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| R            | $0,3 \cdot 250$ | $0,2 \cdot 250$ | $0,6 \cdot 100$ | 185   |
| $\bar{R}$    | $0,7 \cdot 250$ | $0,8 \cdot 250$ | $0,4 \cdot 100$ | 415   |
| <b>TOTAL</b> | 250             | 250             | 100             | 600   |

|              | A   | B   | N   | TOTAL |
|--------------|-----|-----|-----|-------|
| R            | 75  | 50  | 60  | 185   |
| $\bar{R}$    | 175 | 200 | 40  | 415   |
| <b>TOTAL</b> | 250 | 250 | 100 | 600   |

# Problema 6

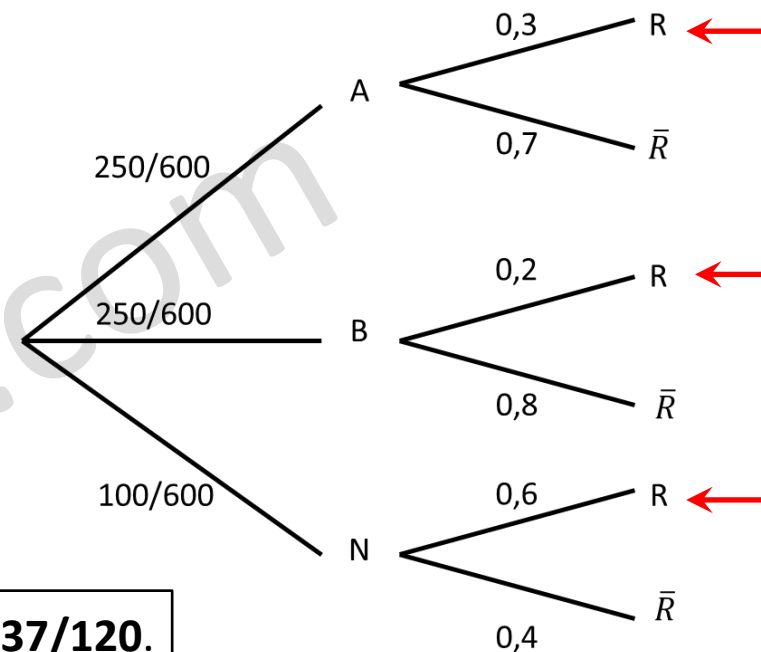
a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

Se aplica el teorema de la probabilidad total, utilizando el diagrama de árbol:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(N) \cdot P(R/N)$$

$$P(R) = \frac{250}{600} \cdot 0,3 + \frac{250}{600} \cdot 0,2 + \frac{100}{600} \cdot 0,6 = \frac{37}{120}$$

La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios es **37/120**.



Podemos resolver el ejercicio de otra forma, con ayuda de la tabla de contingencia.

|           | A   | B   | N   | TOTAL |
|-----------|-----|-----|-----|-------|
| R         | 75  | 50  | 60  | 185   |
| $\bar{R}$ | 175 | 200 | 40  | 415   |
| TOTAL     | 250 | 250 | 100 | 600   |

$$P(R) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{185}{600} = \frac{37}{120}$$

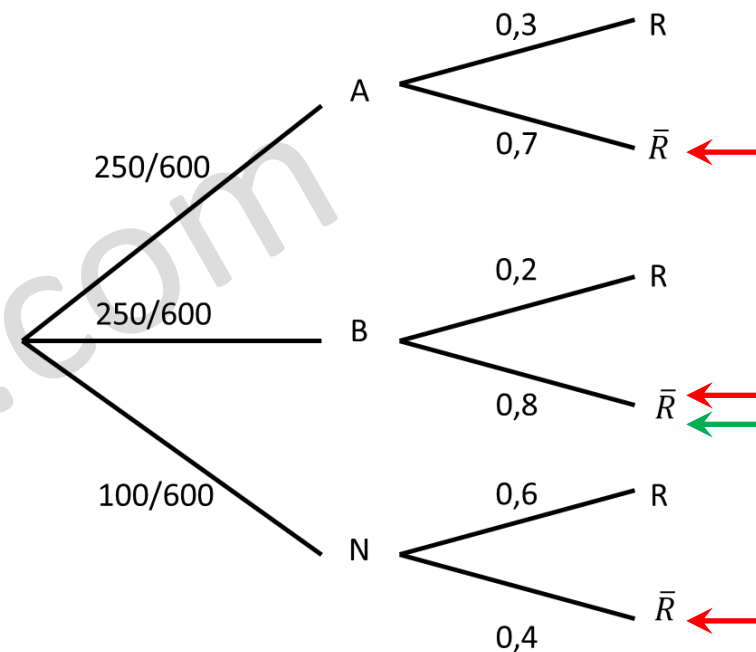
# Problema 6

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.

Se aplica el teorema de Bayes, utilizando el diagrama de árbol:

$$P(B/\bar{R}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{R}/B)}{P(A) \cdot P(\bar{R}/A) + P(B) \cdot P(\bar{R}/B) + P(N) \cdot P(\bar{R}/N)}$$

$$P(B/\bar{R}) = \frac{\frac{250}{600} \cdot 0,8}{\frac{250}{600} \cdot 0,7 + \frac{250}{600} \cdot 0,8 + \frac{100}{600} \cdot 0,4} = \frac{40}{83}$$



La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método es **40/83**.

Podemos resolver el ejercicio de otra forma, con ayuda de la tabla de contingencia.

|           | A   | B   | N   | TOTAL |
|-----------|-----|-----|-----|-------|
| R         | 75  | 50  | 60  | 185   |
| $\bar{R}$ | 175 | 200 | 40  | 415   |
| TOTAL     | 250 | 250 | 100 | 600   |

$$P(B/\bar{R}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{200}{415} = \frac{40}{83}$$

# Problema 6

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”.

Se aplica el principio de multiplicación con el diagrama de árbol.

$$P(N \cap R) = P(N) \cdot P(R/N) = \frac{100}{600} \cdot 0,6 = 0,1$$

La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios” es **0,1**.

Podemos resolver el ejercicio de otra forma, con ayuda de la tabla de contingencia.

|           | A   | B   | N   | TOTAL |
|-----------|-----|-----|-----|-------|
| R         | 75  | 50  | 60  | 185   |
| $\bar{R}$ | 175 | 200 | 40  | 415   |
| TOTAL     | 250 | 250 | 100 | 600   |

$$P(N \cap R) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{60}{600} = 0,1$$

