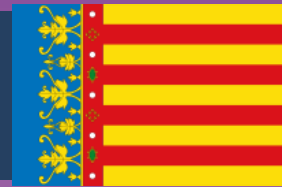




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2025–extra DANA

Álgebra matricial



PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad C = (1 \quad 2) \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

- a) Calcular $M = AB^tC - D$. *(0,75 puntos)*
- b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. *(0,75 puntos)*
- c) Hallar M^2 y M^8 . *(0,5 puntos)*
- d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . *(0,5 puntos)*
- e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^tB)^t$. *(1 punto)*

WWW.

PROBLEMA 1A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad C = (1 \quad 2) \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $M = AB^tC - D$.

Para calcular M , debemos calcular previamente AB^tC .

$$AB^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB^tC - D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1A

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $M^{-1} = \frac{1}{|M|} (Adj(M))^t = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1A

c) Hallar M^2 y M^8 . $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular M^2 , debemos multiplicar M por si misma.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Calculo M^8 a partir de M^2 .

$$M^8 = M^{2 \cdot 4} = (M^2)^4 = (3I)^4 = 3^4 \cdot I^4 = 81 \cdot I = 81 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; M^8 = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1A

d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . $C = (1 \ 2)$ y $C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculo $C \cdot C^t$: $C \cdot C^t = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = (5)$

Una matriz de orden 1 tiene inversa si su único elemento es distinto de cero. **En este caso, $C \cdot C^t$ tiene inversa.**

Calculo $C^t \cdot C$: $C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Se calcula el determinante para comprobar si $C^t \cdot C$ tiene inversa.

$$|C^t \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Una matriz de orden 2 tiene inversa si su determinante es distinto de cero. **En este caso, $C^t \cdot C$ no tiene inversa.**

PROBLEMA 1A

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$.

Se despeja X de la ecuación matricial utilizando las propiedades de las matrices.

$$\begin{aligned} A^t + X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t &= (C^t \cdot B)^t \longrightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t \cdot B)^t - A^t \\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} &= ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \longrightarrow X \cdot I = ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \\ X &= ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \end{aligned}$$

Algunas matrices ya las habíamos calculado en apartados anteriores.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$. $X = ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1}$

Calculo las matrices que me faltan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculo } C^t \cdot B: C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (C^t \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C^t \cdot B)^t - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculo } X: X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) & (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$