



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2025–extra DANA

Álgebra matricial

©Ángel Cuesta Arza



PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad C = (1 \quad 2) \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que, si K es una matriz, K^t representa su matriz traspuesta, se pide:

- a) Calcular $M = AB^tC - D$. *(0,75 puntos)*
- b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. *(0,75 puntos)*
- c) Hallar M^2 y M^8 . *(0,5 puntos)*
- d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . *(0,5 puntos)*
- e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^tB)^t$. *(1 punto)*

WWW.

PROBLEMA 1A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad C = (1 \quad 2) \quad y \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $M = AB^tC - D$.

Para calcular M , debemos calcular previamente AB^tC .

$$AB^tC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB^tC - D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1A

b) Justificar si M es invertible y, si lo es, hallar su inversa. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{La matriz tiene inversa}$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $M^{-1} = \frac{1}{|M|} (Adj(M))^t = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1A

c) Hallar M^2 y M^8 . $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Para calcular M^2 , debemos multiplicar M por si misma.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

Calculo M^8 a partir de M^2 .

$$M^8 = M^{2 \cdot 4} = (M^2)^4 = (3I)^4 = 3^4 \cdot I^4 = 81 \cdot I = 81 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; M^8 = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 1A

d) Justificar si son invertibles las matrices CC^t y C^tC . $C = (1 \ 2)$ y $C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculo $C \cdot C^t$: $C \cdot C^t = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = (5)$

Una matriz de orden 1 tiene inversa si su único elemento es distinto de cero. **En este caso, $C \cdot C^t$ tiene inversa.**

Calculo $C^t \cdot C$: $C^t \cdot C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Se calcula el determinante para comprobar si $C^t \cdot C$ tiene inversa.

$$|C^t \cdot C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Una matriz de orden 2 tiene inversa si su determinante es distinto de cero. **En este caso, $C^t \cdot C$ no tiene inversa.**

PROBLEMA 1A

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$.

Se despeja X de la ecuación matricial utilizando las propiedades de las matrices.

$$\begin{aligned} A^t + X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t &= (C^t \cdot B)^t \longrightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t \cdot B)^t - A^t \\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} &= ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \longrightarrow X \cdot I = ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \\ X &= ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} \end{aligned}$$

Algunas matrices ya las habíamos calculado en apartados anteriores.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $A^t + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t = (C^t B)^t$. $X = ((C^t \cdot B)^t - A^t) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^t \right)^{-1}$

Calculo las matrices que me faltan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculo } C^t \cdot B: C^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (C^t \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C^t \cdot B)^t - A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

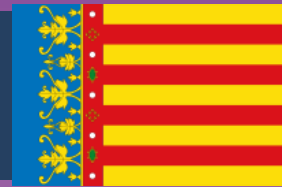
$$\text{Calculo } X: X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) & (-2) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JULIO 2025–extra DANA

Programación lineal

© Angel Cuesta Arza



PROBLEMA 1B

Una empresa de organización de eventos desea poner a la venta dos tipos de entradas para un evento musical: entradas preferentes y entradas estándar, que se venden a 115€ y 90€, respectivamente, aunque en las localidades preferentes la empresa tiene unos gastos de 5€ por entrada porque en ellas se sirve un aperitivo. La instalación de cada localidad preferente tiene un coste de 20€ y la de cada localidad estándar de 10€; la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación. El aforo máximo es de 75 asientos.

- a) ¿Cuántas entradas de cada tipo se deben poner a la venta para obtener el máximo beneficio posible?
- b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x= número de entradas preferentes vendidas.
y= número de entradas estándar vendidas.

Se calcula la función beneficio. Siendo esta la diferencia entre los ingresos y los gastos.

El beneficio obtenido por entrada preferente es: $115 - 5 - 20 = 90 \text{ €}$

El beneficio obtenido por entrada estándar es: $90 - 10 = 80 \text{ €}$

La función que define el beneficio es: $z = 90x + 80y$

En la siguiente diapositiva se definen las restricciones.

A partir del enunciado planteamos las restricciones:

“La instalación de cada localidad preferente tiene un coste de 20€ y la de cada localidad estándar de 10€; la empresa dispone de un presupuesto de 1.000€ para gastos de instalación.” $\rightarrow 20x + 10y \leq 1000 \rightarrow 2x + y \leq 100$

“El aforo máximo es de 75 asientos.” $\rightarrow x + y \leq 75$

“restricciones triviales” $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

La función objetivo está definida por el beneficio: $z = 90x + 80y$

PROBLEMA 1B

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Maximizar: $z = 90x + 80y$

$$\text{s. a. } \begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(a) $2x + y \leq 100$

Expresamos la recta: $2x + y = 100$

Tomamos dos puntos para representarla:

x	y
0	100
50	0

Comprobamos si $(0,0)$ pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación $(0, 0)$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 100 \rightarrow$ Si Cumple; $(0, 0) \in \{2x + y \leq 100\}$

(b) $x + y \leq 75$

Expresamos la recta: $x + y = 75$

Tomamos dos puntos para representarla:

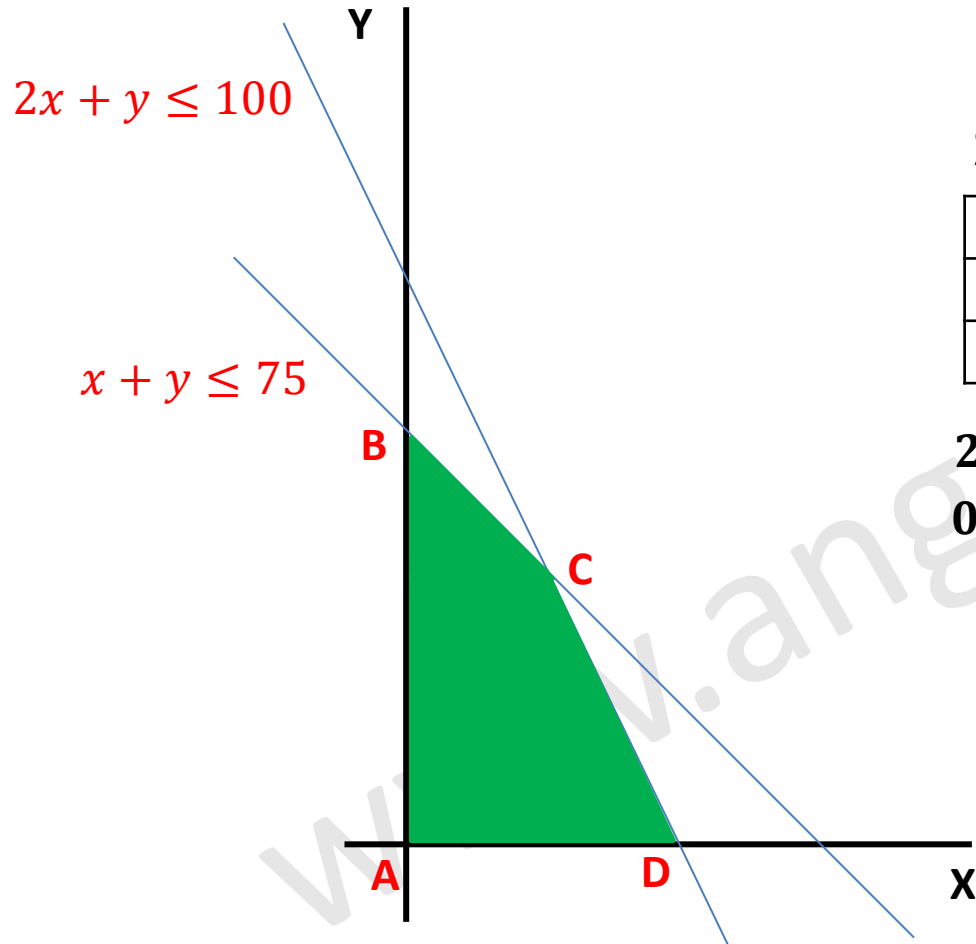
x	y
0	75
75	0

Comprobamos si $(0,0)$ pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación $(0, 0)$

$0 + 0 \leq 75 \rightarrow$ Si Cumple; $(0, 0) \in \{x + y \leq 75\}$

PROBLEMA 1B

Representamos las inecuaciones y observamos cuál es la región factible. s. a. $\begin{cases} 2x + y \leq 100 \\ x + y \leq 75 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$



$$2x + y = 100$$

x	y
0	100
50	0

$$x + y = 75$$

x	y
0	75
75	0

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 100; \quad (0, 0) \in \{2x + y \leq 100\}$$

$$0 + 0 \leq 75; \quad (0, 0) \in \{x + y \leq 75\}$$

Para calcular las coordenadas del vértice C, se debe resolver el sistema de ecuaciones formado por las rectas que dan lugar a dicho vértice. Los vértices A, B y D no hace falta calcularlos, porque ya disponemos de sus coordenadas (son los puntos de corte con los ejes).

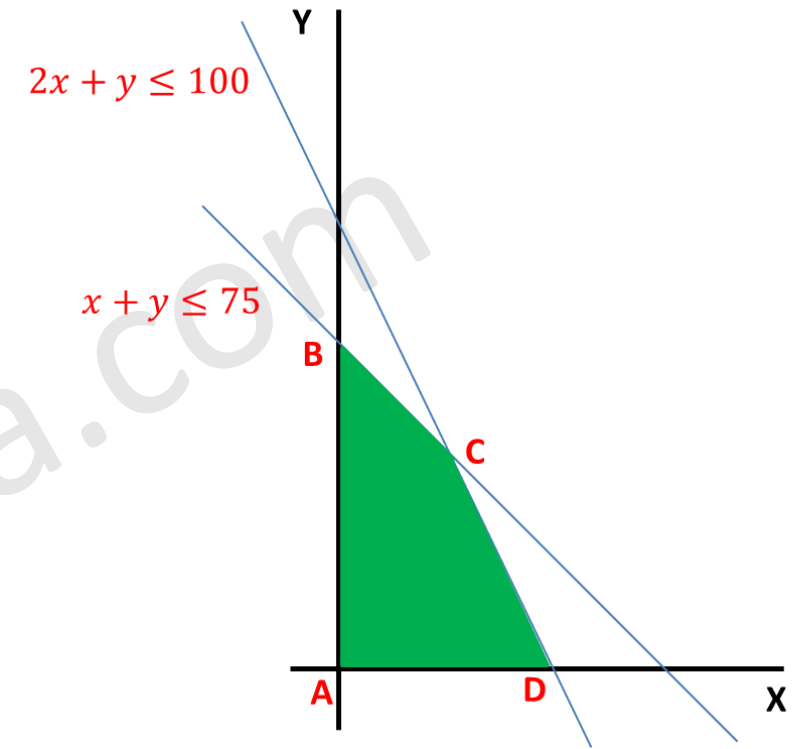
Vértice C:
$$\begin{cases} 2x + y = 100 \\ x + y = 75 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 \\ 75 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{25}{1} = 25 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 100 \\ 1 & 75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50}{1} = 50$$

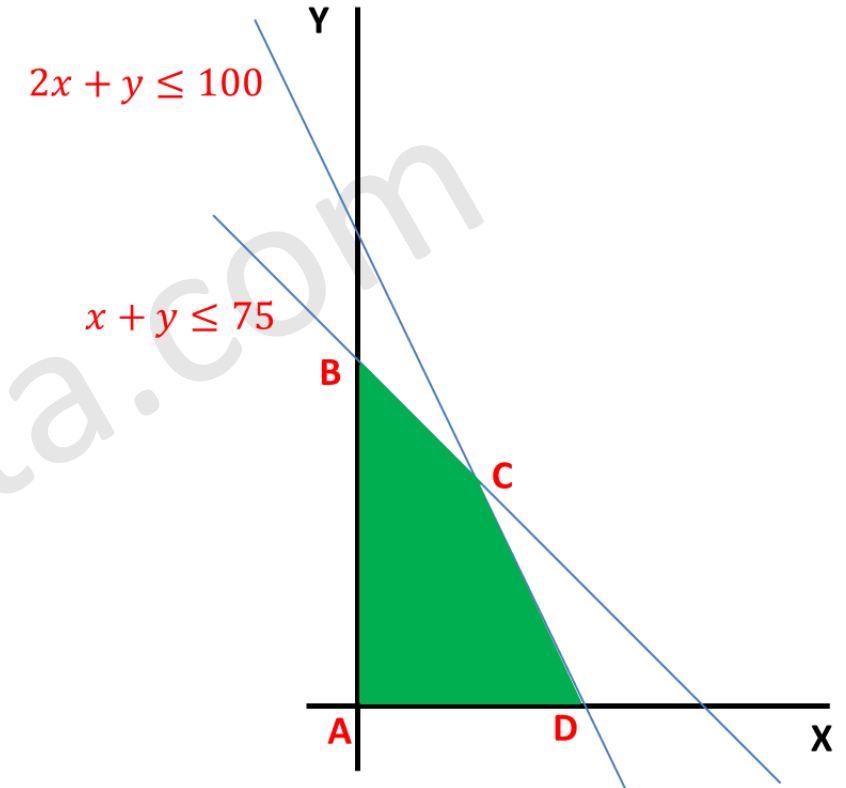
Las coordenadas del vértice C son: **C = (25, 50)**

Las coordenadas del resto de vértices son: **A = (0, 0); B(0, 75) y D(50, 0)**



El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculo los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 90x + 80y$
0	0	$90 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$
0	75	$90 \cdot 0 + 80 \cdot 75 = 6000$
25	50	$90 \cdot 25 + 80 \cdot 50 = 6250$
50	0	$90 \cdot 50 + 80 \cdot 0 = 4500$



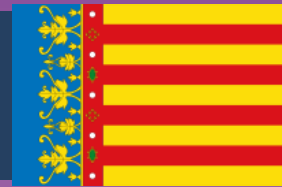
PROBLEMA 1B

Solución: debe poner a la venta **25 entradas preferentes y 50 entradas estándar**. Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el beneficio será de **6250 euros**.

x	y	$z = 90x + 80y$
0	0	$90 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$
0	75	$90 \cdot 0 + 80 \cdot 75 = 6000$
25	50	$90 \cdot 25 + 80 \cdot 50 = 6250$
50	0	$90 \cdot 50 + 80 \cdot 0 = 4500$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2025–extra DANA

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



Problema 2. A. Una empresa agrícola que se dedica al cultivo de frutas tropicales ha implementado un sistema de riego automatizado para optimizar el consumo de agua. La función que describe la necesidad de agua del cultivo (en $m^3/\text{día}$) tras x días de crecimiento, para x entre 0 y 30, es:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 30]$. (0,75 puntos)
- b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima. (2 puntos)
- c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. (0,75 puntos)

Problema 2A

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,30]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 8$ y $x = 20$. En el resto de los valores la función es continua por estar definida por funciones polinómicas.

$$f(8) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^-} x^3 - 4x^2 + 10 = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266 \\ \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8^+} 3x + 9 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 8$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 8$.

Problema 2A

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,30]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 20$.

$$f(20) = 3 \cdot 20 + 9 = 69$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^-} 3x + 9 = 3 \cdot 20 + 9 = 69 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} 70 = 70 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 20} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 20$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 20$.

Problema 2A

b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se calcula la derivada del primer trozo. El segundo trozo es una recta de pendiente positiva y siempre es creciente. Y el tercer trozo es constante y ni crece ni decrece.

$$f_1'(x) = 3x^2 - 8x \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x \cdot (3x - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8/3 \end{cases}$$

$$f_2'(x) = 3 > 0 \forall x \in (8, 20) \rightarrow f(x) \text{ es creciente } \forall x \in (8, 20)$$

Se hace un estudio de signos de $f_1'(x)$, teniendo en cuenta que $x \in (0, 8)$.

	0	8/3	8
$f_1'(x)$	-	+	
$f(x)$			

En el primer tramo se observa que hay un mínimo relativo. Se calcula.

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 10 = \frac{14}{27} \approx 0,5185 \quad m = \left(\frac{8}{3}, \frac{14}{27}\right)$$

Problema 2A

b) Determina en qué días la necesidad de agua es máxima y mínima.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$$

Se ha calculado el único extremo relativo de la función a trozos. Pero para obtener los máximos y mínimos absolutos, dado que la función no es continua, debemos evaluarla en $x = 0, x = 8, x = 20$ y $x = 30$

$$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 10 = 10$$

$$f(8) = 8^3 - 4 \cdot 8^2 + 10 = 266$$

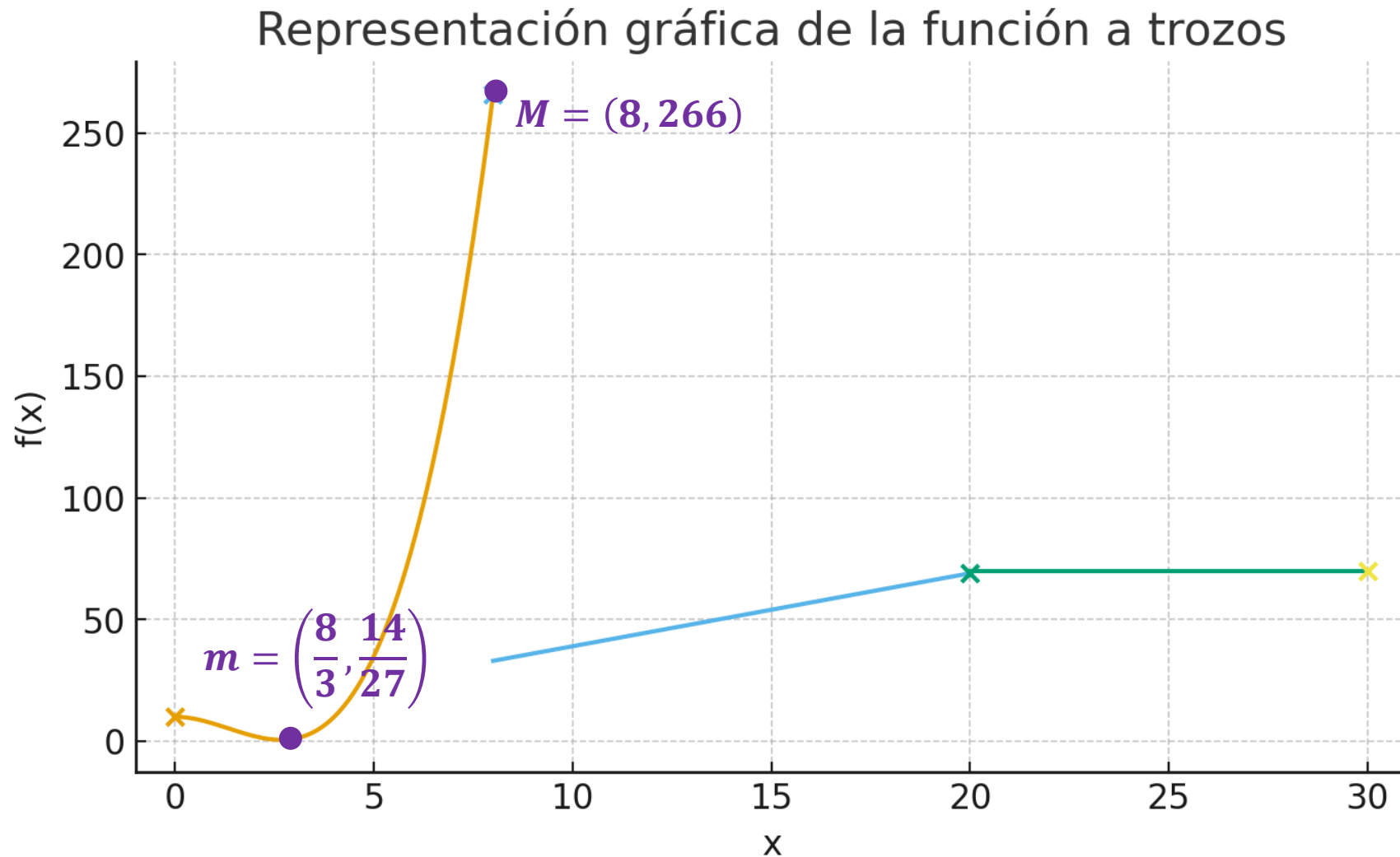
$$f(20) = 3 \cdot 20 + 9 = 69$$

$$f(30) = 70$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 + 10 = \frac{14}{27} \approx 0,5185$$

Como puede comprobarse, la máxima necesidad de agua se alcanza en el **día 8** y la mínima en el día **8/3**.

En esta gráfica puedes comprobar donde se encuentran el máximo y el mínimo absoluto.



Problema 2A

c) Calcula el área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ 3x + 9 & \text{si } 8 < x \leq 20 \\ 70 & \text{si } 20 < x \leq 30 \end{cases}$

Anteriormente se ha comprobado que $f_1(x)$ es positiva en el intervalo en el cual se pide calcular el área ya que el mínimo absoluto se encuentra por encima del eje X . Por ello, para calcular el área basta con obtener el valor de la integral definida de $f_1(x)$ entre 3 y 7.

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

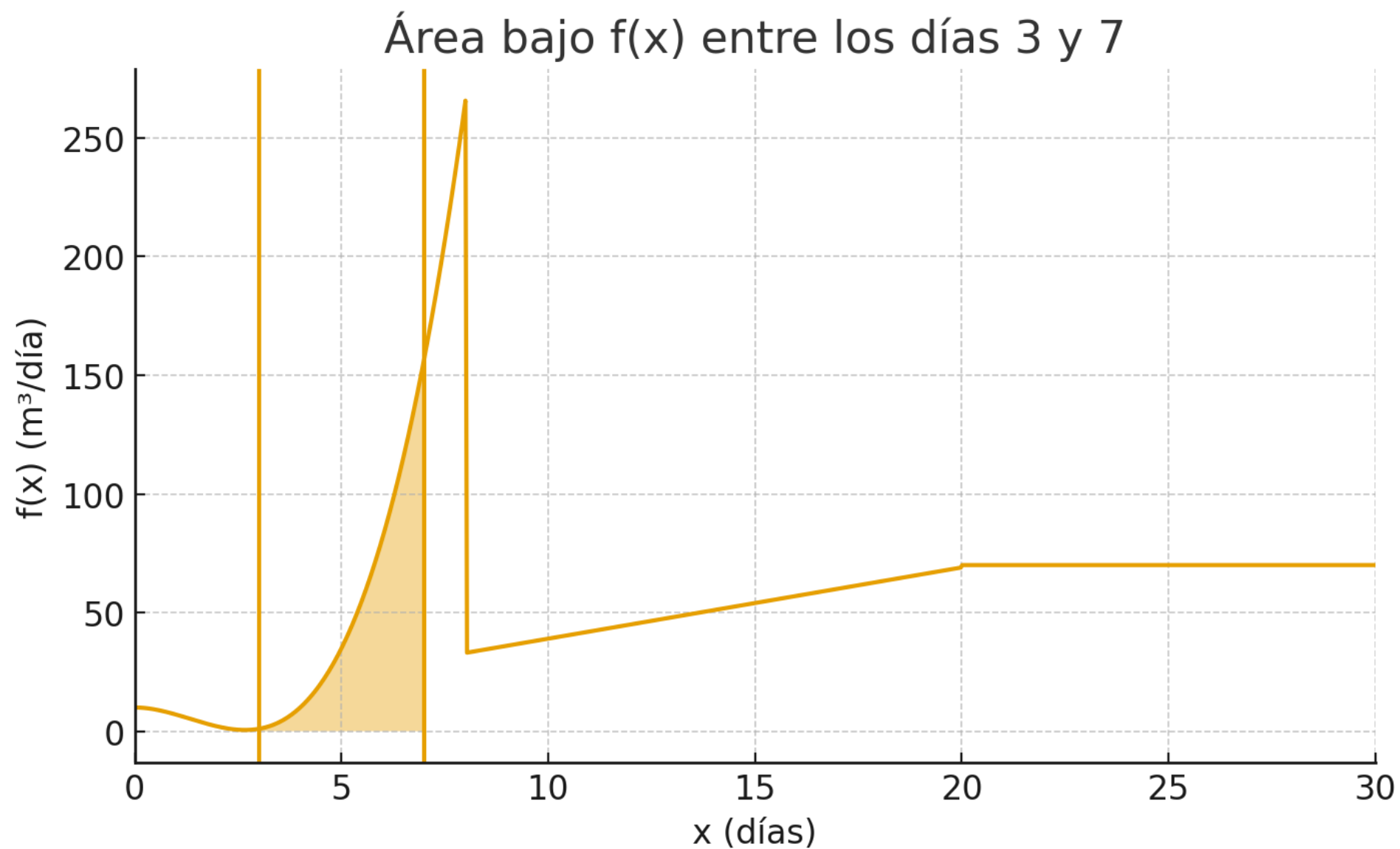
$$\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 (x^3 - 4x^2 + 10) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + 10 \cdot x \right]_3^7 = \left(\frac{7^4}{4} - 4 \cdot \frac{7^3}{3} + 10 \cdot 7 \right) - \left(\frac{3^4}{4} - 4 \cdot \frac{3^3}{3} + 10 \cdot 3 \right)$$

$$\int_3^7 f(x) dx = \frac{2555}{12} - \frac{57}{4} = \frac{596}{3}$$

El área delimitada por esta función y el eje OX entre los días 3 y 7. es **596/3 u.a.**

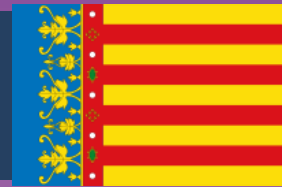
NOTA: La integral calculada representa **el volumen total de agua requerido por el cultivo entre el día 3 y el día 7.**

En esta gráfica puedes comprobar cual es el área bajo la curva que hemos calculado.





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2025–extra DANA

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



Problema 2B

Problema 2. B. Cuando la temperatura de un invernadero se mantiene a x grados centígrados, siendo x un número real entre 10 y 30, la producción (en kilogramos) de cierta hortaliza viene dada por la función $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$. Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.

- a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. *(1,5 puntos)*
- b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. *(1 punto)*
- c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg? *(1 punto)*

www.c

Problema 2B

a) Determina los valores A y B que aparecen en la función $Q(x)$. Recordamos que $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$

“Sabemos que la producción máxima se alcanza cuando el invernadero se mantiene a 21 grados centígrados, y que dicha producción máxima es 5.300 kg.” $\rightarrow \begin{cases} Q(21) = 5300 \\ Q'(21) = 0 \end{cases}$

Se aplican las condiciones dadas por el enunciado para obtener los valores de A y B .

$$Q(21) = 30 \cdot 21^2 + A \cdot 21 + B - 21^3 = 5300 \rightarrow 21A + B = 1331 \xrightarrow{\hspace{10em}} B = 8$$

$$Q'(x) = 60x + A - 3 \cdot x^2 \rightarrow Q'(21) = 60 \cdot 21 + A - 3 \cdot 21^2 = 0 \rightarrow A - 63 = 0 \rightarrow A = 63$$

Los valores pedidos son: $A = 63$ y $B = 8$.

Aunque no se indica explícitamente en el enunciado, en los apartados siguientes utilizaremos los valores de A y B obtenidos. Siendo $Q(x) = 30x^2 + 63x + 8 - x^3$

Reordenando los términos: $Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 8$

Problema 2B

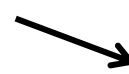
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $Q(x)$. $Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 8$

Se calcula la derivada de la función y se iguala a cero. Después se hace un estudio de signos de la función derivada.

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63 \longrightarrow -3x^2 + 60x + 63 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \longrightarrow \notin [10,30] \\ x = 21 \end{cases}$$

10 21 30

Se hace un estudio de signos de $Q'(x)$, teniendo en cuenta que $x \in [10,30]$.

$Q'(x)$	+	-
$Q(x)$		

$$Q'(15) = 288 > 0 \quad Q'(25) = -312 < 0$$

$Q(x)$ es **creciente** si $x \in (10,21)$ y **decreciente** si $x \in (21,30)$

Problema 2B

c) Para valores de la temperatura comprendidos entre 10 y 30 grados centígrados, ¿en algún caso se obtiene una producción inferior a 1.000 kg?

A partir del estudio de signos de $Q(x)$ podemos deducir que el mínimo absoluto está en $x = 10$ o $x = 30$.

	10	21	30
$Q'(x)$	+		-
$Q(x)$		↗	↘

Calculo cual es el valor del mínimo absoluto de la función en el intervalo propuesto. $Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 8$

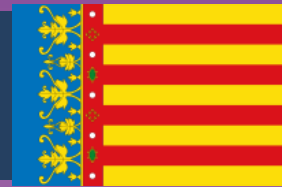
$$Q(10) = -10^3 + 30 \cdot 10^2 + 63 \cdot 10 + 8 = 2638$$

$$Q(30) = -30^3 + 30 \cdot 30^2 + 63 \cdot 30 + 8 = 1898$$

Nunca se obtendrá una producción inferior a 1000 kg, ya que la producción mínima es 1898 kg.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JULIO 2025–extra DANA

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza



VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

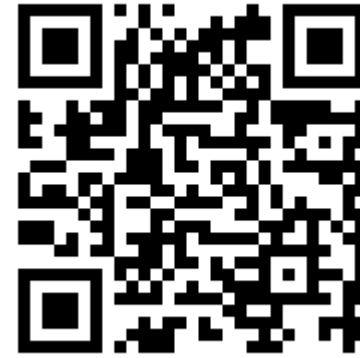
No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Curso de repaso de
probabilidad básica



Álgebra de conjuntos.
Fórmulas de la probabilidad.



Teorema de la probabilidad
total y teorema de Bayes



Problema 3

Manuel va a celebrar su cumpleaños y ha invitado a dos grupos de amigos que no se conocen entre sí: del instituto y de su barrio. Cada grupo va a una tienda distinta a comprar un regalo. El grupo del instituto va a la tienda A, donde un 40% de los regalos son libros, un 15% es ropa y un 45% son juegos. El grupo de su barrio va a la tienda B, donde el 20% son libros, el 10% es ropa y el 70% son juegos. Supón que cada grupo elige aleatoriamente su regalo. Calcula:

- a) La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo.
- b) La probabilidad de que Manuel tenga como regalo un libro o un juego.
- c) La probabilidad de que, si uno de los regalos es ropa y el otro no, el regalo de ropa se haya comprado en la tienda A.

Solución: Se definen los sucesos: $Li=\{\text{El regalo es un libro}\}$ $A=\{\text{Compra en la tienda A}\}$
 $Ro=\{\text{El regalo es ropa}\}$ $B=\{\text{Compra en la tienda B}\}$
 $Ju=\{\text{El regalo es un juego}\}$

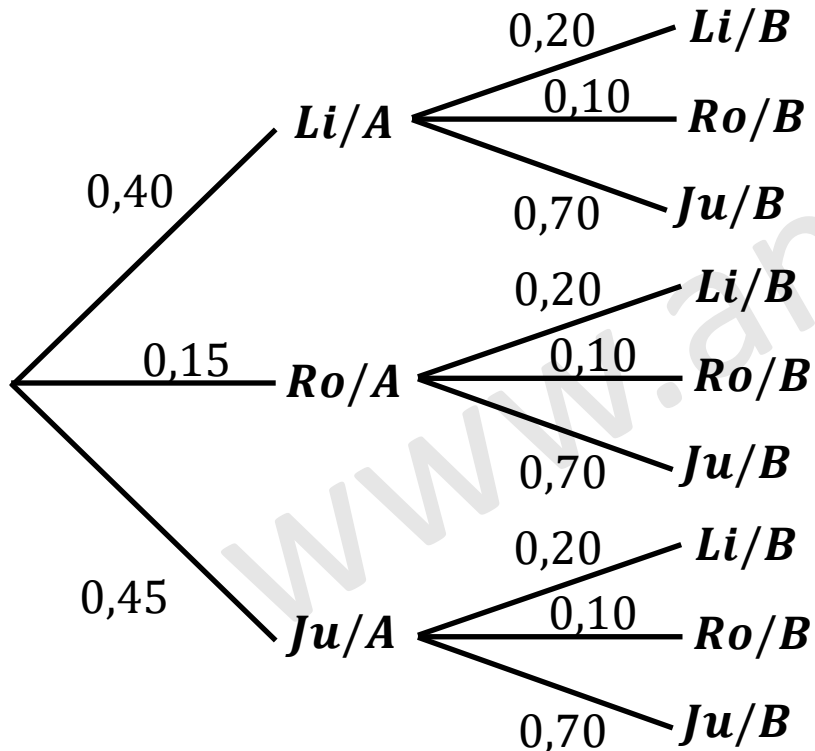
Se construye un diagrama de árbol para plantear el problema.

Tomamos datos del enunciado.

“El grupo del instituto va a la tienda A, donde un 40% de los regalos son libros, un 15% es ropa y un 45% son juegos” →
$$\begin{cases} P(Li/A) = 0,40 \\ P(Ro/A) = 0,15 \\ P(Ju/A) = 0,45 \end{cases}$$

“El grupo de su barrio va a la tienda B, donde el 20% son libros, el 10% es ropa y el 70% son juegos” →
$$\begin{cases} P(Li/B) = 0,20 \\ P(Ro/B) = 0,10 \\ P(Ju/B) = 0,70 \end{cases}$$

A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.



a) La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo.

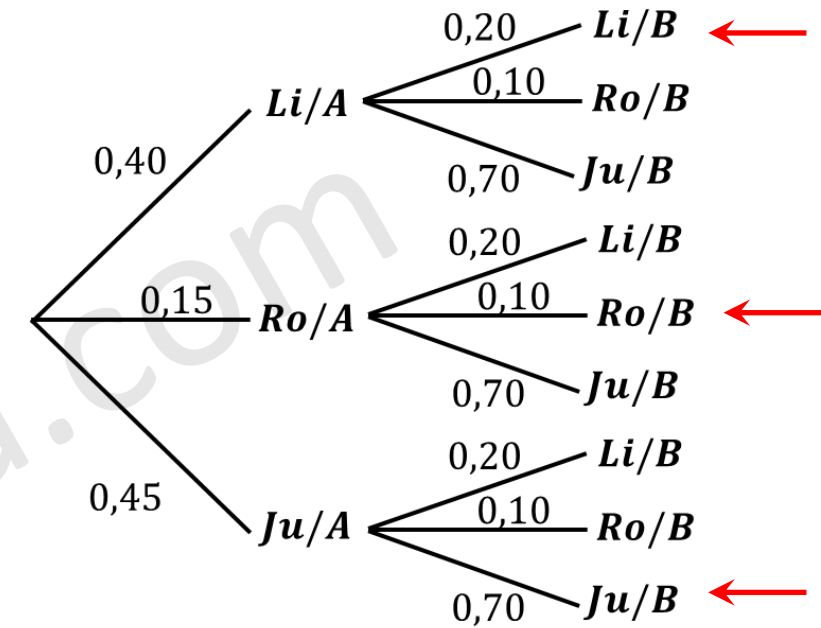
Se calcula la probabilidad utilizando el suceso contrario al pedido. En este caso, que los dos regalos sean del mismo tipo. De esta forma ahorramos cálculos ya que sólo tenemos que utilizar 3 ramas del diagrama de árbol.

$$P(\text{Distinto tipo}) = 1 - P(\text{Igual tipo})$$

$$P(\text{Distinto tipo}) = 1 - (P(Li/A \cap Li/B) + P(Ro/A \cap Ro/B) + P(Ju/A \cap Ju/B))$$

$$P(\text{Distinto tipo}) = 1 - (0,40 \cdot 0,20 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,45 \cdot 0,70) = 1 - 0,41 = \mathbf{0,59}$$

La probabilidad de que Manuel tenga dos regalos de distinto tipo es **0,59 (59 %)**.



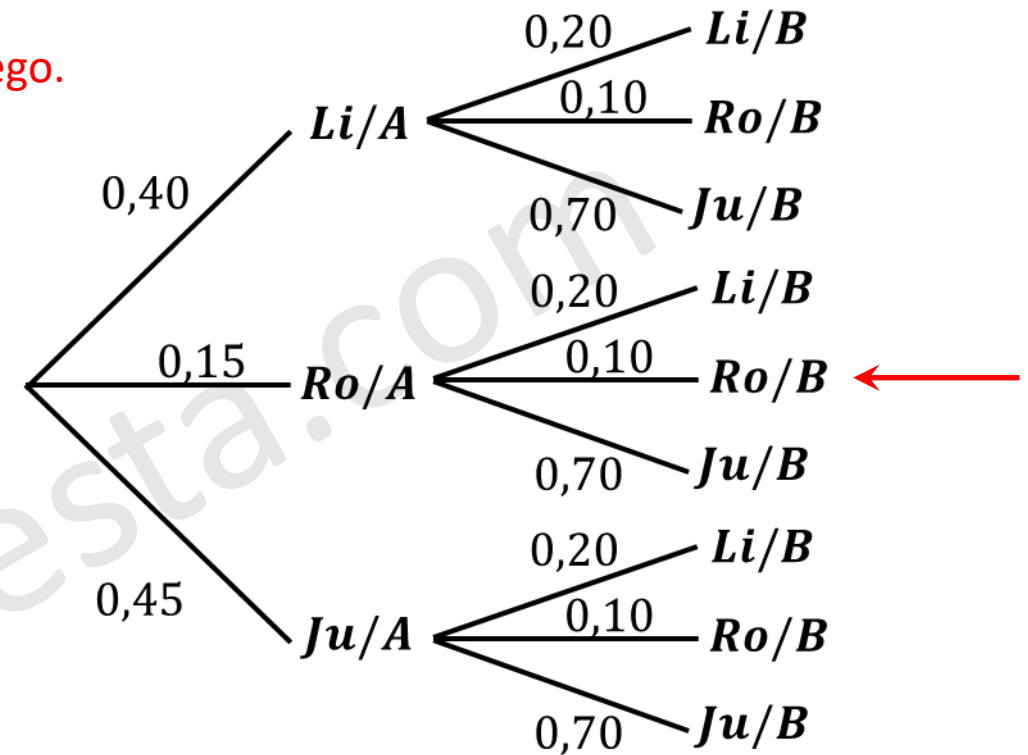
b) La probabilidad de que Manuel tenga como regalo un libro o un juego.

De nuevo recurrimos al suceso contrario para ahorrar trabajo.
El suceso contrario al pedido es que ambos regalos sean de ropa.

$$P(Li \cup Ju) = 1 - P(Ro/A \cap Ro/B)$$

$$P(Li \cup Ju) = 1 - 0,15 \cdot 0,10 = 1 - 0,015 = \mathbf{0,985}$$

La probabilidad de que Manuel tenga como regalo un libro o un juego es **0,985 (98,5 %)**.



c) La probabilidad de que, si uno de los regalos es ropa y el otro no, el regalo de ropa se haya comprado en la tienda A.

Se marcan todos los sucesos en los cuales uno de los regalos es ropa y el otro no. Se aplica el teorema de Bayes.

Se definen los sucesos:

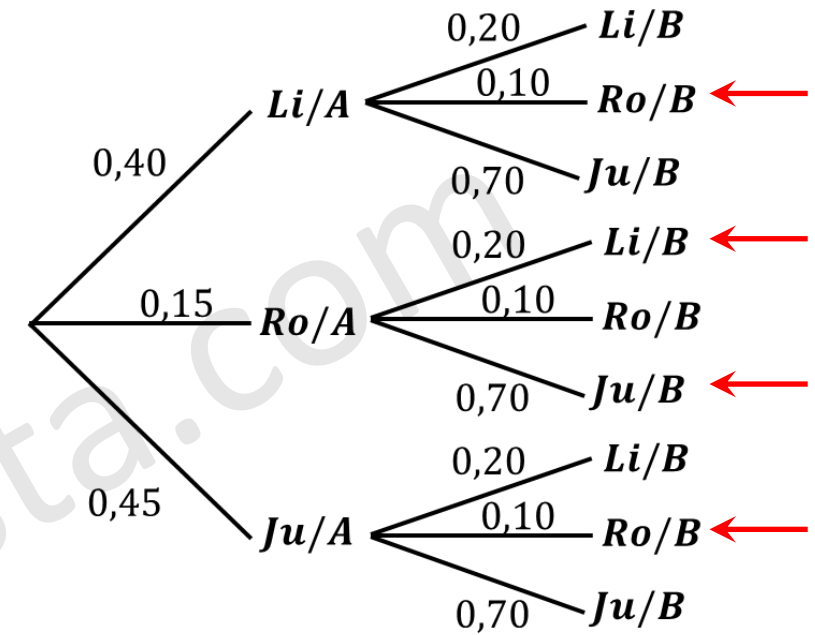
$E = \{\text{El regalo de ropa se ha comprado en la tienda A}\}$

$F = \{\text{Uno de los regalos es ropa y el otro no}\}$

La probabilidad pedida en función de los nuevos sucesos es:

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(Ro/A \cap Li/B) + P(Ro/A \cap Ju/B)}{(Li/A \cap Ro/B) + (Ro/A \cap Li/B) + P(Ro/A \cap Ju/B) + (Ju/A \cap Ro/B)}$$

$$P(E/F) = \frac{0,15 \cdot 0,20 + 0,15 \cdot 0,70}{0,40 \cdot 0,10 + 0,15 \cdot 0,20 + 0,15 \cdot 0,70 + 0,45 \cdot 0,20} = \frac{0,135}{0,22} = \frac{27}{44} \approx \mathbf{0,6136}$$



La probabilidad de que, si uno de los regalos es ropa y el otro no, el regalo de ropa se haya comprado en la tienda A es **27/44 (61,36 %)**.