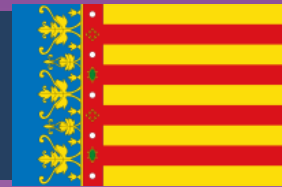




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JULIO 2025-reserva

Álgebra matricial



PROBLEMA 1B

Problema 1. B. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C . *(0,75 puntos)*
- b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$. *(1,25 puntos)*
- c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^tA + C = X^tB$, siendo X^t la matriz traspuesta de X . *(1,5 puntos)*

www.ang

PROBLEMA 1B

a) Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C .

(0,75 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz traspuesta de C : $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz $A \cdot C^t$:

$$A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$.

Calculo la matriz $B - A$: $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = D$

Calcula la matriz inversa de $D = B - A$ mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|D|$; $|D| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz D **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t \longrightarrow D^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1B

c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X .
(1,5 puntos)

Se despeja X^t , aplicando las propiedades de las matrices:

$$\begin{aligned} X^t \cdot A + C &= X^t \cdot B \longrightarrow C = X^t \cdot B - X^t \cdot A \longrightarrow C = X^t \cdot (B - A) \longrightarrow C \cdot (B - A)^{-1} = X^t \cdot (B - A) \cdot (B - A)^{-1} \\ X^t &= C \cdot (B - A)^{-1} \end{aligned}$$

Como ya dispongo de las matrices necesarias, calculo X^t :

$$X^t = C \cdot (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 7 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (X^t)^t = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{8/3} & \mathbf{11/3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2/3} & \mathbf{-5/3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5/3} & \mathbf{5/3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

©Angel Cuesta Arza