



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2025–reserva

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

WWW.α-

Problema 2B

Solución:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

El Dominio de $f(x)$ es:

$$\mathbf{Dom\ } f(x) = \mathbf{R - \{-2, 1\}}$$

Calculo los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 27}{0^2 + 0 - 2} = \frac{27}{2} \rightarrow \mathbf{A = \left(0, \frac{27}{2}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\mathbf{B = (-3, 0)}$$

$$\mathbf{C = (3, 0)}$$

Problema 2B

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0^-} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

El cálculo de los límites laterales nos ayuda a posicionar la curva respecto de las asíntotas verticales y su conocimiento nos ayudará a representar más fácilmente la gráfica de la función en el último apartado.

Problema 2B

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Por lo tanto, **$y = 3$ es A. H. de $f(x)$**

No hay asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.

Es posible situar la curva respecto de la asíntota horizontal. Para ello basta con calcular la imagen de la función para valores grandes en valor absoluto. Por ejemplo, $f(-100)$ y $f(100)$. Se hace con fines pedagógicos, ya que en el examen no es necesario hacerlo.

$$f(-100) = \frac{3 \cdot (-100)^2 - 27}{(-100)^2 + (-100) - 2} \approx 3,028 > 3 \rightarrow \text{la curva va **por encima** de la asíntota horizontal } y = 3$$

$$f(100) = \frac{3 \cdot (100)^2 - 27}{(100)^2 + 100 - 2} \approx 2,968 < 3 \rightarrow \text{la curva va **por debajo** de la asíntota horizontal } y = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$f(-100) \approx 3,028 > 3$$

$$y = 3$$

$$f(100) \approx 2,968 < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$x = -2$$

$$x = 1$$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

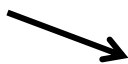
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + x - 2) - (3x^2 - 27) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{6x^3 + 6x^2 - 12x - 6x^3 - 3x^2 + 54x + 27}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2} \quad \text{Igualamos la derivada a cero: } \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \longrightarrow 3x^2 + 42x + 27 = 0$$

$$x^2 + 14x + 9 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -7 + 2\sqrt{10} \approx -0,675 \\ x = -7 - 2\sqrt{10} \approx -13,32 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	$-7 - 2\sqrt{10}$	-2	$-7 + 2\sqrt{10}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	+	
$f(x)$						

$f(x)$ **decrece** en $(-7 - 2\sqrt{10}, -2) \cup (-2, -7 + 2\sqrt{10})$

$f(x)$ **crece** en $(-\infty, -7 - 2\sqrt{10}) \cup (-7 + 2\sqrt{10}, 1) \cup (1, +\infty)$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

c) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	$-7 - 2\sqrt{10}$	-2	$-7 + 2\sqrt{10}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+	+
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x = -7 - 2\sqrt{10}$ y un mínimo relativo en $x = -7 + 2\sqrt{10}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f(-7 - 2\sqrt{10}) = \frac{3 \cdot (-7 + 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 - 2\sqrt{10})^2 + (-7 - 2\sqrt{10}) - 2} \approx 3,12$$

Máximo relativo:

$$D = (-7 - 2\sqrt{10}; 3, 12)$$

$$f(-7 + 2\sqrt{10}) = \frac{3 \cdot (-7 + 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 + 2\sqrt{10})^2 + (-7 + 2\sqrt{10}) - 2} \approx 11,55$$

Mínimo relativo:

$$E = (-7 + 2\sqrt{10}; 11, 55)$$

$$E = (-7 + 2\sqrt{10}; 11,55)$$

$$A = \left(0, \frac{27}{2}\right)$$

Como el máximo relativo no se ve nada,
hago un ZOOM en la siguiente diapositiva

$$D = (-7 - 2\sqrt{10}; 3, 12)$$

