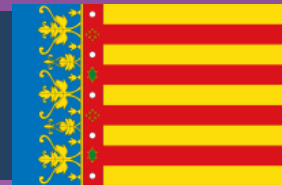




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2025-reserva

Problema de sistemas de ecuaciones



PROBLEMA 1A

Esta semana una chica ha consumido 1.470 megabytes de datos de su móvil conectándose a redes sociales, a periódicos y a la universidad. La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad. Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos. Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad. ¿Cuántos megabytes consume una hora de conexión a redes sociales?; ¿cuántos una hora de conexión a periódicos?; ¿cuántos una hora de conexión a la universidad?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x= Megabytes/h conexión redes sociales. y= Megabytes/h conexión periódicos. z= Megabytes/h conexión universidad.
--

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

“La chica ha pasado 10 horas conectada a redes sociales, 4 horas conectada a periódicos y 6 horas conectada a la universidad” $\longrightarrow 10x + 4y + 6z = 1470$

“Se sabe que en una hora de conexión a redes sociales se consume un 20% más de megabytes que en una hora de conexión a periódicos” $\longrightarrow x = 1,2y \longrightarrow x - 1,2y = 0$

“Se sabe también que en una hora de conexión a periódicos se consume 30 megabytes más que en una hora de conexión a la universidad” $\longrightarrow y = z + 30 \longrightarrow y - z = 30$

Se resuelve el sistema de ecuaciones en la siguiente diapositiva.

PROBLEMA 1A

Quedando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 10x + 4y + 6z = 1470 \\ x - 1,2y = 0 \\ y - z = 30 \end{cases}$$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer (puedes utilizar otros métodos).

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1470 & 4 & 6 \\ 0 & -1,2 & 0 \\ 30 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 1 & -1,2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1980}{22} = 90$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1470 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 1 & -1,2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1650}{22} = 75$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 & 1470 \\ 1 & -1,2 & 0 \\ 0 & 1 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 1 & -1,2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{990}{22} = 45$$

Solución: El consumo es de **90 megabytes por hora en redes sociales**, **75 megabytes por hora en periódicos** y **45 megabytes por hora en la universidad**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JULIO 2025–reserva

Álgebra matricial



PROBLEMA 1B

Problema 1. B. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C . *(0,75 puntos)*
- b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$. *(1,25 puntos)*
- c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^tA + C = X^tB$, siendo X^t la matriz traspuesta de X . *(1,5 puntos)*

www.ang

PROBLEMA 1B

a) Calcula el producto AC^t , siendo C^t la matriz traspuesta de C .

(0,75 puntos)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculo la matriz traspuesta de C : $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz $A \cdot C^t$:

$$A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa de la matriz $B - A$.

Calculo la matriz $B - A$: $B - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = D$

Calcula la matriz inversa de $D = B - A$ mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|D|$; $|D| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz D **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t \longrightarrow D^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 7/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1B

c) Obtén la matriz X que verifica la ecuación $X^t A + C = X^t B$, siendo X^t la matriz traspuesta de X .
(1,5 puntos)

Se despeja X^t , aplicando las propiedades de las matrices:

$$X^t \cdot A + C = X^t \cdot B \longrightarrow C = X^t \cdot B - X^t \cdot A \longrightarrow C = X^t \cdot (B - A) \longrightarrow C \cdot (B - A)^{-1} = X^t \cdot (B - A) \cdot (B - A)^{-1}$$
$$X^t = C \cdot (B - A)^{-1}$$

Como ya dispongo de las matrices necesarias, calculo X^t :

$$X^t = C \cdot (B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 7 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & -2/3 & 5/3 \\ 11/3 & -5/3 & 5/3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

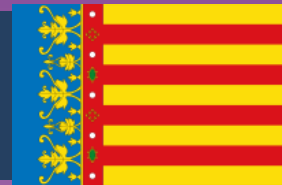
$$X = (X^t)^t = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8/3 & 11/3 & -1 \\ -2/3 & -5/3 & 0 \\ 5/3 & 5/3 & -1 \end{pmatrix}$$

©Angel Cuesta Arza



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2025-reserva

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

- a) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor?
(0,75 puntos)
- b) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor?
(0,75 puntos)
- c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros?
(1,25 puntos)
- d) Calcula la siguiente integral:
(0,75 puntos)

$$\int_3^8 B(t) dt$$

WWW.C

Problema 2A

Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

a) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor máximo y cuál es este valor?

Al ser una función cuadrática que tiene un coeficiente negativo en su término cuadrático, el máximo de la función se alcanza en su vértice. En 4º de ESO se obtendría con la fórmula del vértice, pero en bachillerato se hará la derivada y se igualará a cero.

$$B'(t) = -2t + 12 \longrightarrow -2t + 12 = 0 \longrightarrow t = 6 \in [2,9]$$

Se comprueba que en $t = 6$ la función alcanza un máximo utilizando el criterio de la segunda derivada.

$$B''(t) = -2 \longrightarrow B''(6) = -2 < 0 \rightarrow B(t) \text{ alcanza su valor máximo en } t = 6$$

Se calcula el valor de la empresa para ese tiempo.

$$B(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 11 = -36 + 72 - 11 = 25$$

La máxima valoración de la empresa se alcanza a los **6 años** y es de **25 millones de euros**.

Problema 2A

Problema 2. A. El valor de una empresa (en millones de euros) se expresa en función del tiempo t (en años) según la función $B(t) = -t^2 + 12t - 11$, para t entre 2 y 9.

b) ¿En qué momento alcanza la empresa su valor mínimo y cuál es este valor?

Al ser una función cuadrática que tiene un coeficiente negativo en su término cuadrático el mínimo de la función se alcanza en uno de los extremos del intervalo definido por su dominio.

Se evalúa el valor de la función en $t = 2$ y $t = 9$.

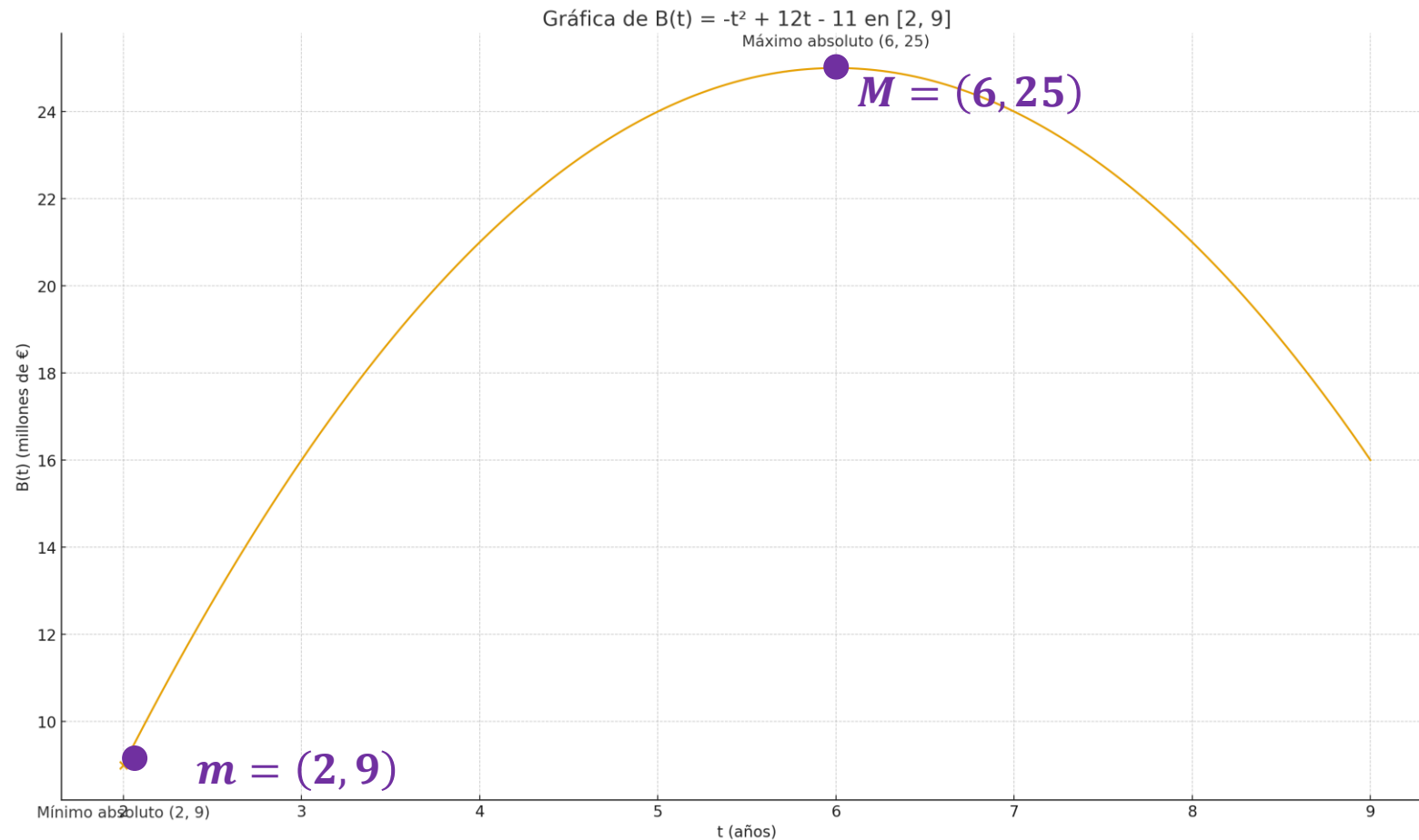
$$B(2) = -2^2 + 12 \cdot 2 - 11 = -4 + 24 - 11 = 9$$

$$B(9) = -9^2 + 12 \cdot 9 - 11 = -81 + 108 - 11 = 16$$

La mínima valoración de la empresa se alcanza a los 2 años y es de 9 millones de euros .
--

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

En esta gráfica puedes comprobar donde se encuentran el máximo y el mínimo absoluto. Se ha representado la función que proporciona la valoración de la empresa (en millones de euros) entre los 2 y los 9 años.



c) ¿En qué periodo el valor de la empresa es superior a 24 millones de euros?

En este caso se resuelve la inecuación correspondiente. También se puede resolver el ejercicio mediante una ecuación conociendo la forma de la función cuadrática.

$$B(t) > 24 \rightarrow -t^2 + 12 \cdot t - 11 > 24 \longrightarrow -t^2 + 12 \cdot t - 35 > 0$$

Se resuelve la inecuación de segundo grado. Para ello necesito resolver en primer lugar la ecuación de segundo grado.

$$-t^2 + 12 \cdot t - 35 = 0 \longrightarrow t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-35)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{-2} = \frac{-12 \pm 2}{-2} \longrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 7 \end{cases}$$

Se hace un estudio de signos, teniendo en cuenta que $t \in [2,9]$.

t	2	NO	5	SI	7	NO	9
$-t^2 + 12 \cdot t - 35$		—		+		—	

$$t = 3; \quad -3^2 + 12 \cdot 3 - 35 = -8 < 0$$

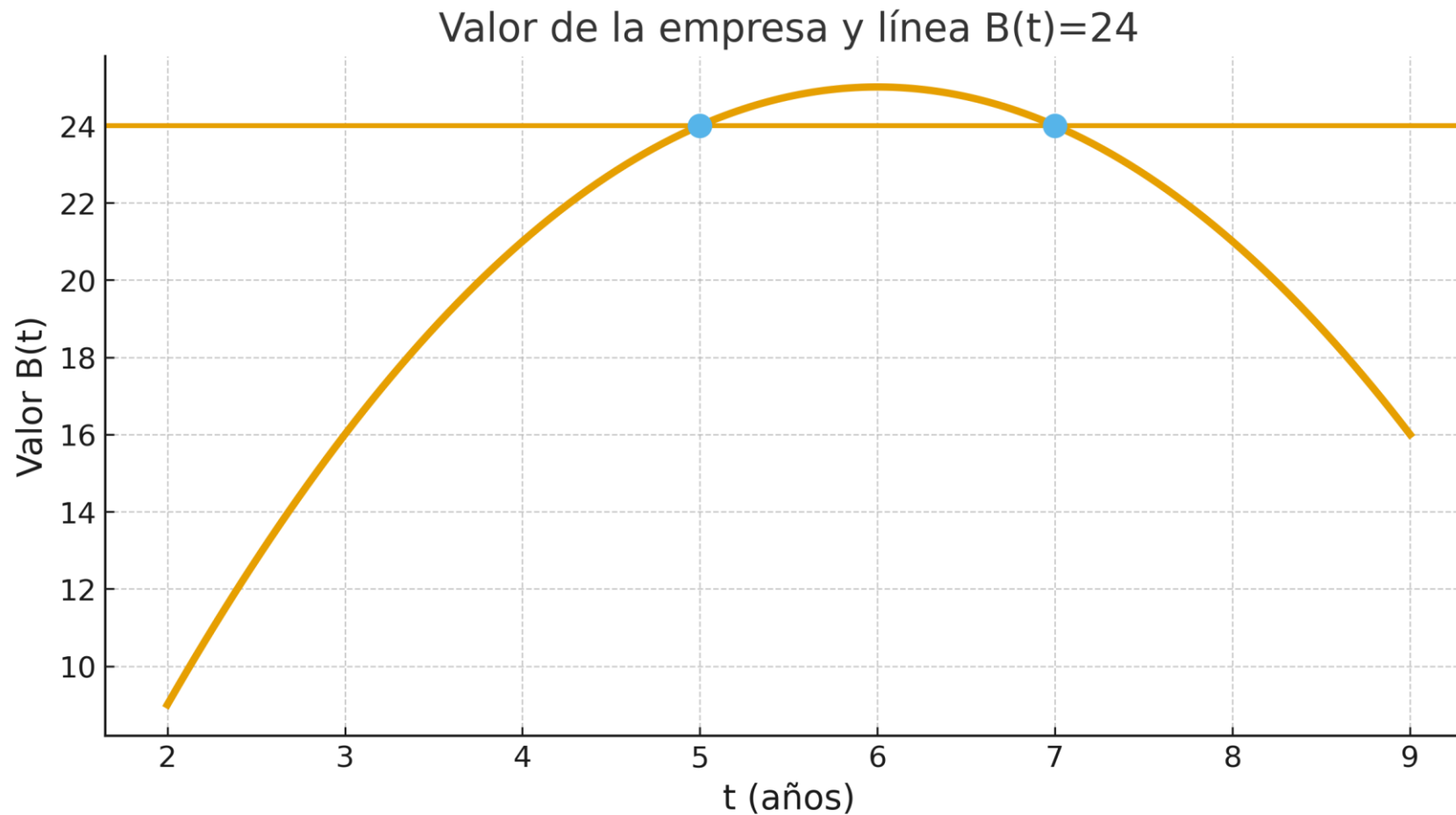
$$t = 6; \quad -6^2 + 12 \cdot 6 - 35 = 1 > 0$$

$$t = 8; \quad -8^2 + 12 \cdot 8 - 35 = -3 < 0$$

El valor de la empresa es superior a 24 millones de euros si $t \in (5, 7)$

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

Es fácil comprobar que el intervalo pedido se podría haber obtenido encontrando los puntos de corte de la función de valoración de la empresa y la recta que define la valoración igual a 24 millones.



Problema 2A

d) Calcula la siguiente integral:

$$\int_3^8 B(t) dt$$

Se calcula la función primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_3^8 B(t) dt = \int_3^8 (-t^2 + 12 \cdot t - 11) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + 12 \cdot \frac{t^2}{2} - 11 \cdot t \right]_3^8$$

$$\int_3^8 B(t) dt = \left(-\frac{8^3}{3} + 12 \cdot \frac{8^2}{2} - 11 \cdot 8 \right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 12 \cdot \frac{3^2}{2} - 11 \cdot 3 \right) = \frac{376}{3} - 12 = \frac{340}{3}$$

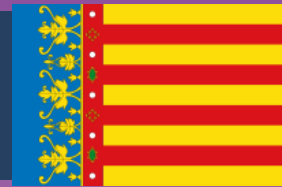
El valor de la integral definida es **340/3**.

NOTA: el valor de esta integral definida se utiliza en economía para obtener la valoración media de una empresa a lo largo de los años. Para ello se utiliza la fórmula:

$$V = \frac{1}{8-3} \cdot \int_a^b B(t) dt = \frac{1}{8-3} \cdot \int_3^8 B(t) dt = \frac{68}{3} \approx 22,67 \text{ millones de euros}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2025–reserva

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

WWW.α-

Problema 2B

Solución:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$x^2 + x - 2 = 0 \longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

El Dominio de $f(x)$ es:

$$\mathbf{Dom\ } f(x) = \mathbf{R - \{-2, 1\}}$$

Calculo los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x = 0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 - 27}{0^2 + 0 - 2} = \frac{27}{2} \rightarrow \mathbf{A = \left(0, \frac{27}{2}\right)}$$

$$\text{Eje X (} y = 0 \text{)} \rightarrow \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = 0 \rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

$$\mathbf{B = (-3, 0)}$$

$$\mathbf{C = (3, 0)}$$

Problema 2B

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos puntos y lo comprobamos.

$$\text{En } x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-15}{0^-} = +\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -2 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{-24}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

El cálculo de los límites laterales nos ayuda a posicionar la curva respecto de las asíntotas verticales y su conocimiento nos ayudará a representar más fácilmente la gráfica de la función en el último apartado.

Problema 2B

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Por lo tanto, $y = 3$ es A. H. de $f(x)$

No hay asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.

Es posible situar la curva respecto de la asíntota horizontal. Para ello basta con calcular la imagen de la función para valores grandes en valor absoluto. Por ejemplo, $f(-100)$ y $f(100)$. Se hace con fines pedagógicos, ya que en el examen no es necesario hacerlo.

$$f(-100) = \frac{3 \cdot (-100)^2 - 27}{(-100)^2 + (-100) - 2} \approx 3,028 > 3 \rightarrow \text{la curva va **por encima** de la asíntota horizontal } y = 3$$

$$f(100) = \frac{3 \cdot (100)^2 - 27}{(100)^2 + 100 - 2} \approx 2,968 < 3 \rightarrow \text{la curva va **por debajo** de la asíntota horizontal } y = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

$$f(-100) \approx 3,028 > 3$$

$$y = 3$$

$$f(100) \approx 2,968 < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

$$x = -2$$

$$x = 1$$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + x - 2) - (3x^2 - 27) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{6x^3 + 6x^2 - 12x - 6x^3 - 3x^2 + 54x + 27}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2} \quad \text{Igualamos la derivada a cero: } \frac{3x^2 + 42x + 27}{(x^2 + x - 2)^2} = 0 \longrightarrow 3x^2 + 42x + 27 = 0$$

$$x^2 + 14x + 9 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -7 + 2\sqrt{10} \approx -0,675 \\ x = -7 - 2\sqrt{10} \approx -13,32 \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$	$-7 - 2\sqrt{10}$	-2	$-7 + 2\sqrt{10}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+	+
$f(x)$						

$f(x)$ **decrece** en $(-7 - 2\sqrt{10}, -2) \cup (-2, -7 + 2\sqrt{10})$

$f(x)$ **crece** en $(-\infty, -7 - 2\sqrt{10}) \cup (-7 + 2\sqrt{10}, 1) \cup (1, +\infty)$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + x - 2}$$

c) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	$-7 - 2\sqrt{10}$	-2	$-7 + 2\sqrt{10}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	-	+	+
$f(x)$						

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $x = -7 - 2\sqrt{10}$ y un mínimo relativo en $x = -7 + 2\sqrt{10}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f(-7 - 2\sqrt{10}) = \frac{3 \cdot (-7 + 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 - 2\sqrt{10})^2 + (-7 - 2\sqrt{10}) - 2} \approx 3,12$$

Máximo relativo:

$$D = (-7 - 2\sqrt{10}; 3, 12)$$

$$f(-7 + 2\sqrt{10}) = \frac{3 \cdot (-7 + 2\sqrt{10})^2 - 27}{(-7 + 2\sqrt{10})^2 + (-7 + 2\sqrt{10}) - 2} \approx 11,55$$

Mínimo relativo:

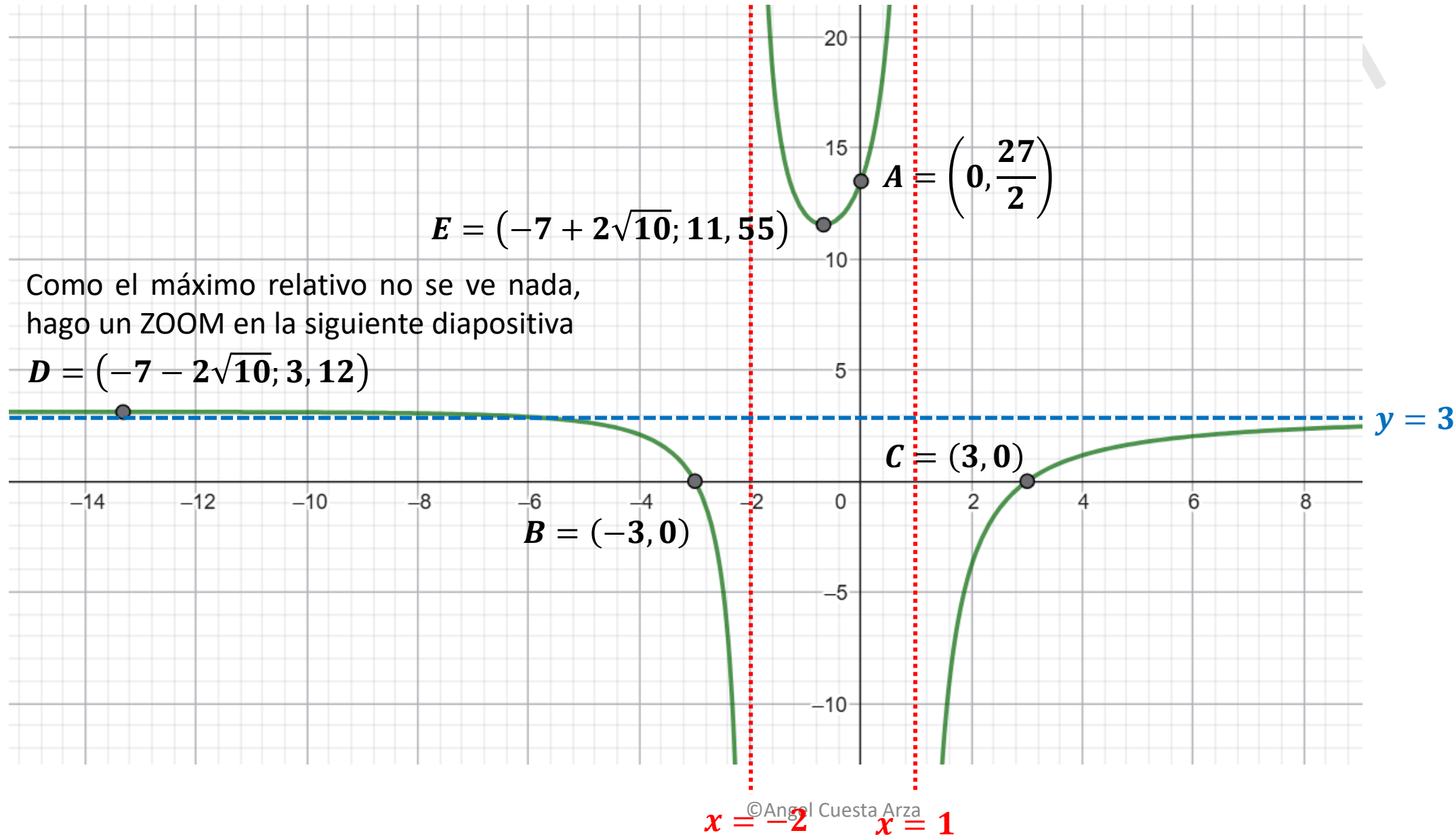
$$E = (-7 + 2\sqrt{10}; 11, 55)$$

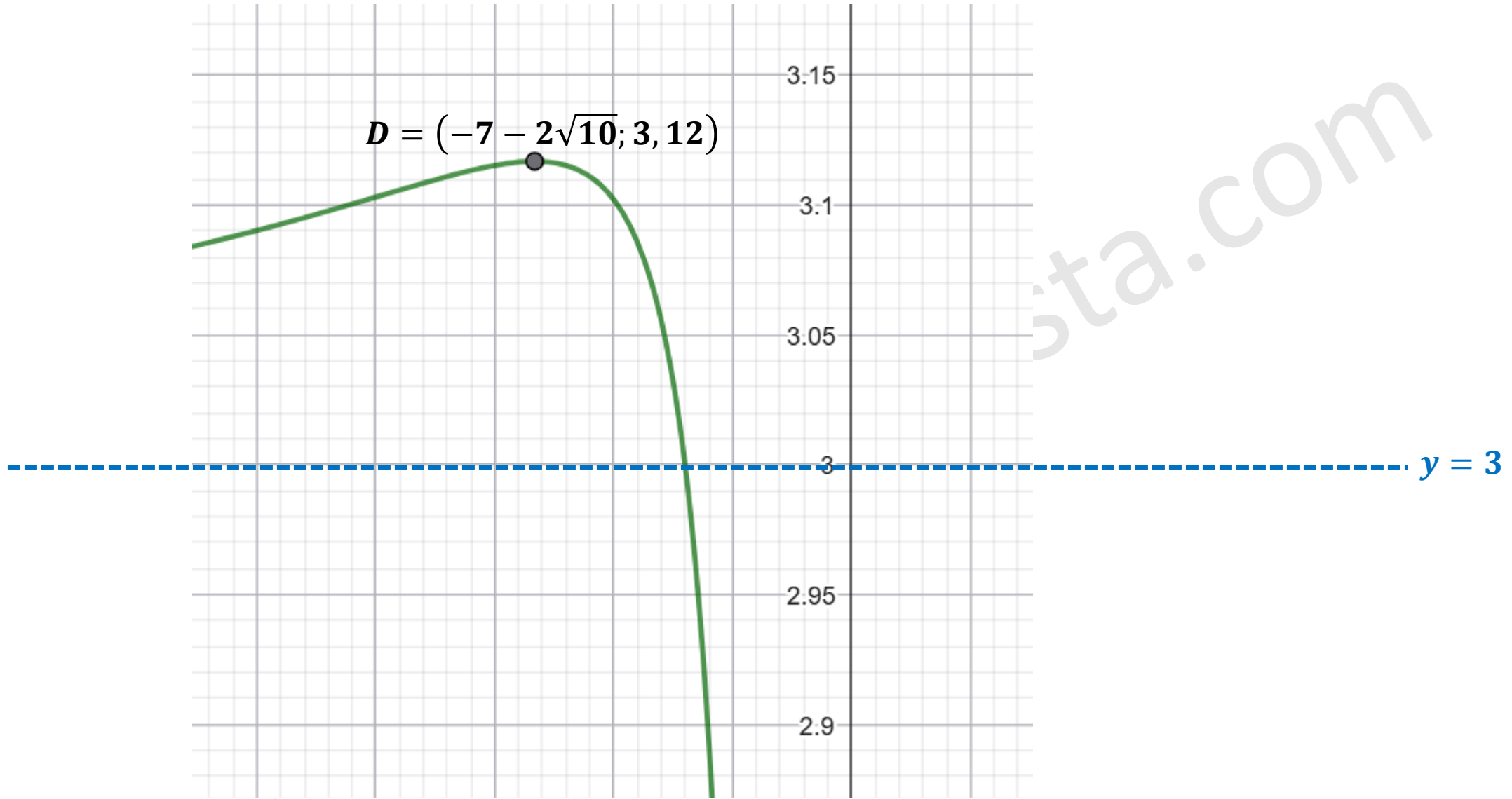
$$E = (-7 + 2\sqrt{10}; 11,55)$$

$$A = \left(0, \frac{27}{2}\right)$$

Como el máximo relativo no se ve nada,
hago un ZOOM en la siguiente diapositiva

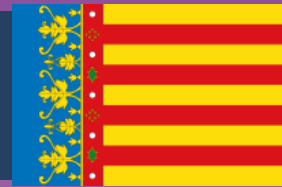
$$D = (-7 - 2\sqrt{10}; 3,12)$$







PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JULIO 2025-reserva

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza



VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Curso de repaso de
probabilidad básica



Álgebra de conjuntos.
Fórmulas de la probabilidad.



Teorema de la probabilidad
total y teorema de Bayes



Problema 3

Una empresa de mantenimiento de automóviles evalúa los coches haciéndoles dos controles; si los dos salen negativos entonces el coche se califica como no adecuado y si los dos salen positivos entonces se califica como adecuado. Sin embargo, si uno de los controles sale positivo y el otro negativo, entonces se le hace un tercer control; si este sale positivo la calificación es de coche adecuado, y en caso contrario la calificación es de no adecuado. Se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8 y que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control. Seleccionamos al azar un coche de esta marca para su evaluación.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado?
- b) Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control?
- c) Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado?

Solución: Se definen los sucesos: $PC1=\{\text{El coche pasa el control 1}\}$ $A=\{\text{El coche es considerado adecuado}\}$
 $PC2=\{\text{El coche pasa el control 2}\}$
 $PC3=\{\text{El coche pasa el control 3}\}$

Se construye un diagrama de árbol para plantear el problema.

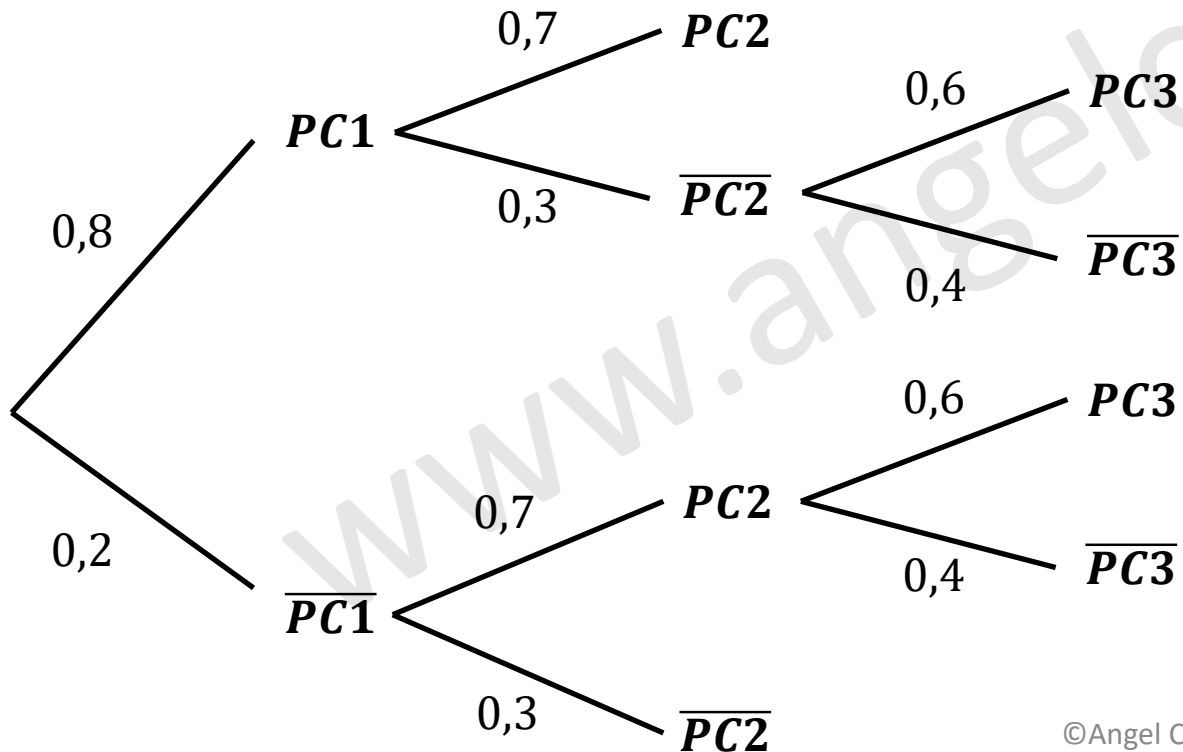
Tomamos datos del enunciado.

“Se sabe que una determinada marca pasa correctamente el primer control con una probabilidad de 0,8” $\longrightarrow P(PC1) = 0,8; P(\overline{PC1}) = 0,2$

“que la probabilidad de que pase el control disminuye en 0,1 cada vez que se le hace un control” $\longrightarrow P(PC2/PC1) = 0,7; P(PC2/\overline{PC1}) = 0,7$

“si uno de los controles sale positivo y el otro negativo” $\longrightarrow P(PC3/PC1 \cap \overline{PC2}) = 0,6; P(PC3/\overline{PC1} \cap PC2) = 0,6$

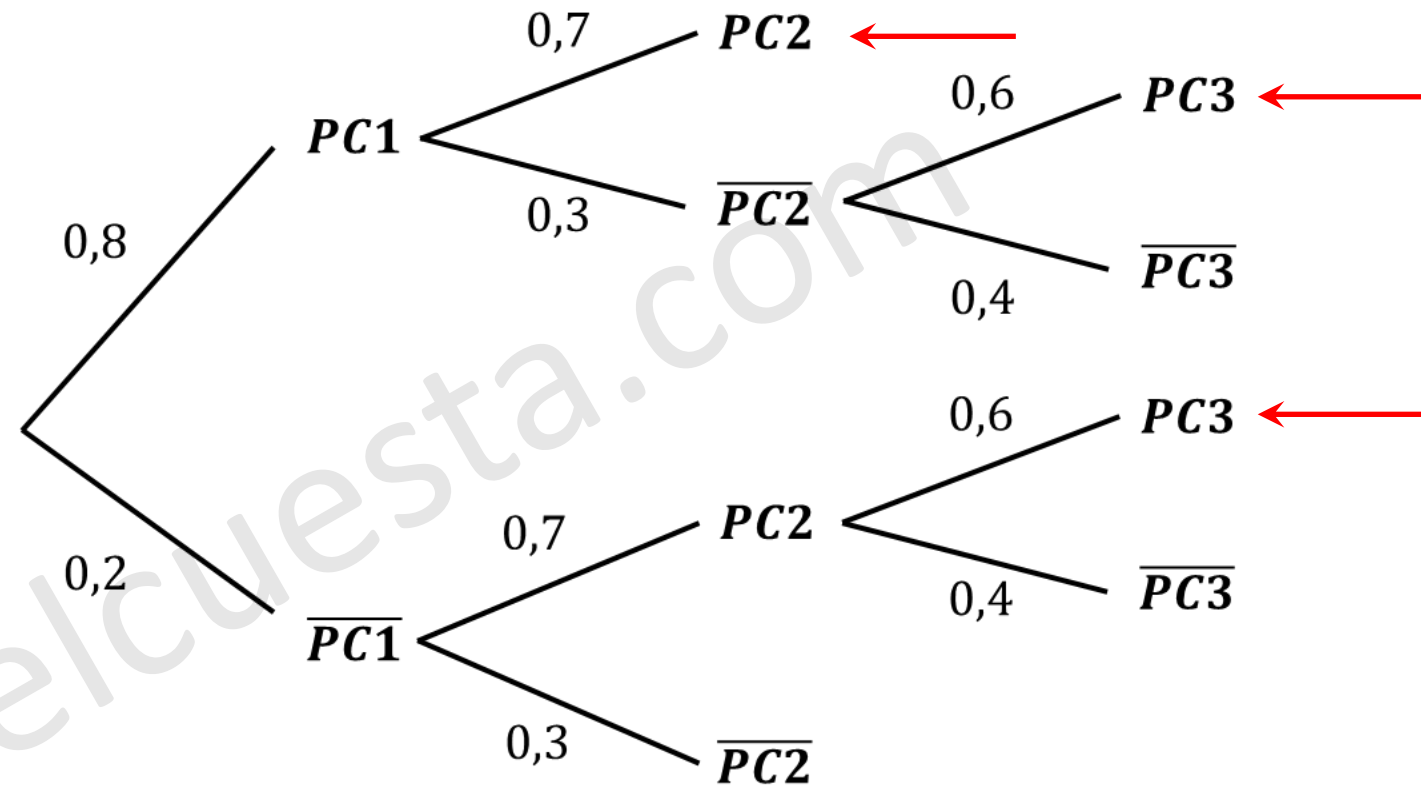
A partir de estos datos, representaremos un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado?

“... si los dos salen positivos entonces se califica como adecuado. Sin embargo, si uno de los controles sale positivo y el otro negativo, entonces se le hace un tercer control; si este sale positivo la calificación es de coche adecuado ...”

Se calcula la probabilidad pedida sumando las probabilidades de las 3 ramas que cumplen la condición de que el coche sea calificado como adecuado.



$$P(A) = P(PC1) \cdot P(PC2/PC1) + P(PC1) \cdot P(\overline{PC2}/PC1) \cdot P(PC3/PC1 \cap \overline{PC2}) + P(PC1) \cdot P(\overline{PC2}/PC1) \cdot P(PC3/\overline{PC1} \cap PC2)$$

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = \mathbf{0,788}$$

La probabilidad de que el coche seleccionado sea calificado como adecuado es **0,788 (78,8 %)**.

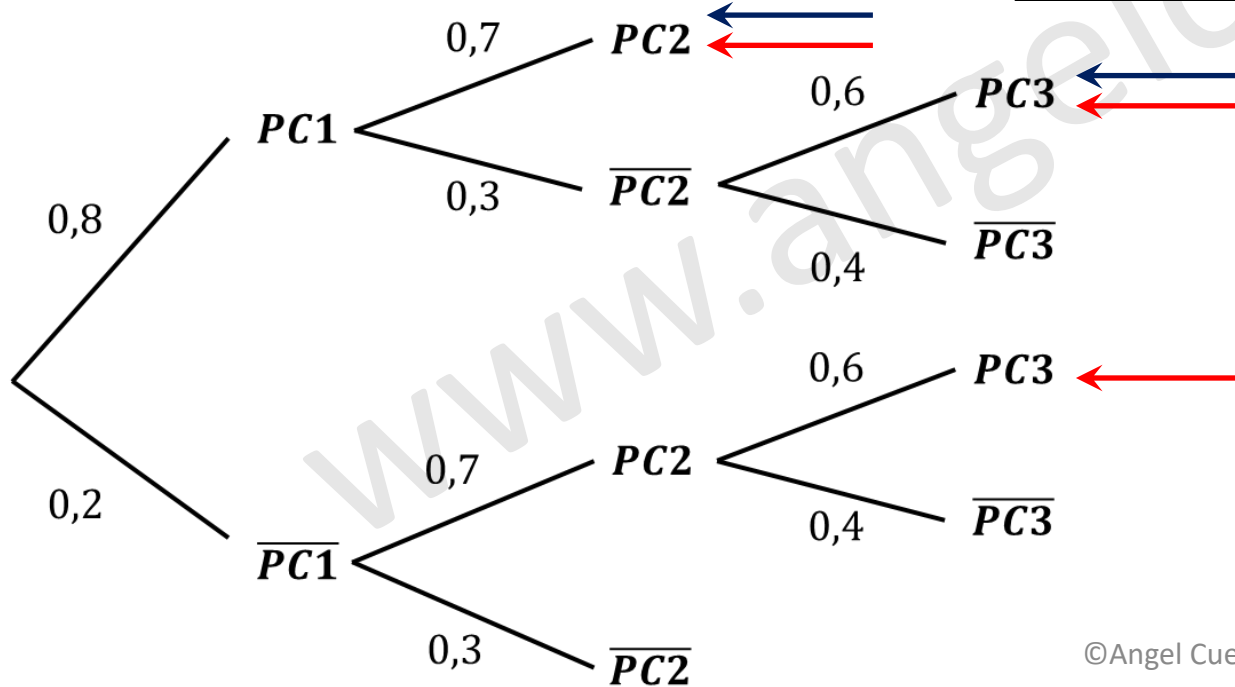
b) Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado el primer control?

Se aplica el teorema de Bayes.

$$P(PC1/A) = \frac{P(PC1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(PC1) \cdot P(PC2/PC1) + P(PC1) \cdot P(\overline{PC2}/PC1) \cdot P(PC3/PC1 \cap \overline{PC2})}{P(A)}$$

$$P(PC1/A) = \frac{0,8 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6}{0,788} = \mathbf{0,8934}$$

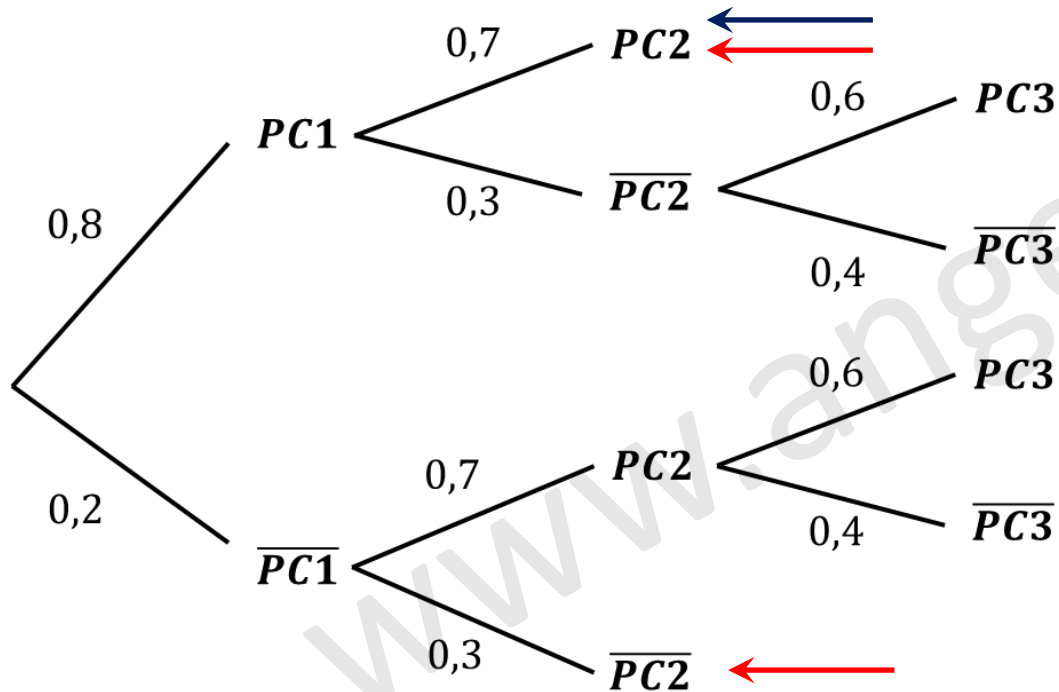
Si se sabe que el coche seleccionado ha sido calificado como adecuado, la probabilidad de que haya pasado el primer control es **0,8934 (89,34 %)**.



c) Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado?

Se aplica el teorema de Bayes. Sea $B = \{\text{Solo se le han hecho dos controles al coche}\}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(PC1) \cdot P(PC2/PC1)}{P(PC1) \cdot P(PC2/PC1) + P(\overline{PC1}) \cdot P(\overline{PC2}/\overline{PC1})} = \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3} = \mathbf{0,9032}$$



Si se sabe que al coche seleccionado solo se le han hecho dos controles, la probabilidad de que haya sido calificado como adecuado es **0,9032 (90,32 %)**.