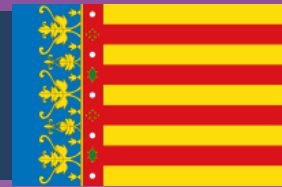




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JULIO 2025

Álgebra matricial



PROBLEMA 1B

Problema 1. B. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. (1 punto)

www.a.

PROBLEMA 1B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$2XA + B^t C = I \rightarrow 2XA = I - B^t C \rightarrow XA = \frac{1}{2}(I - B^t C) \rightarrow XA \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot I = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Para calcular X , debemos calcular previamente $I - B^t C$ y C^{-1} .

$$B^t C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - B^t C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ Se calcula la matriz inversa de A a continuación.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1B

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

$$X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Calculo la matriz X :

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 & 8 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 57 & -15 \\ 6 & 9 & -1 \\ 24 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ AD es diagonal. (1 punto)

Calculo la matriz $A \cdot D$:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot z \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot z \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 + 2z \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz $A \cdot D$ será diagonal si los elementos a_{13} y a_{23} son nulos: $\begin{cases} -1 + 2z = 0 \\ 1 - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow z = \frac{1}{2}$

$$z = \frac{1}{2}$$