



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2025

Funciones

©Angel Cuesta Arza



Problema 2. A. Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste D_A tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste D_B para un neumático B tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

- a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. *(1 punto)*
- b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. *(1 punto)*
- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. *(1,5 puntos)*

Problema 2A

- a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)

Para calcular el número de meses que deben transcurrir para que el desgaste sea el mismo para los dos tipos de neumáticos debemos igualar las funciones D_A y D_B . A continuación, se despeja x , que será el número de meses pedido.

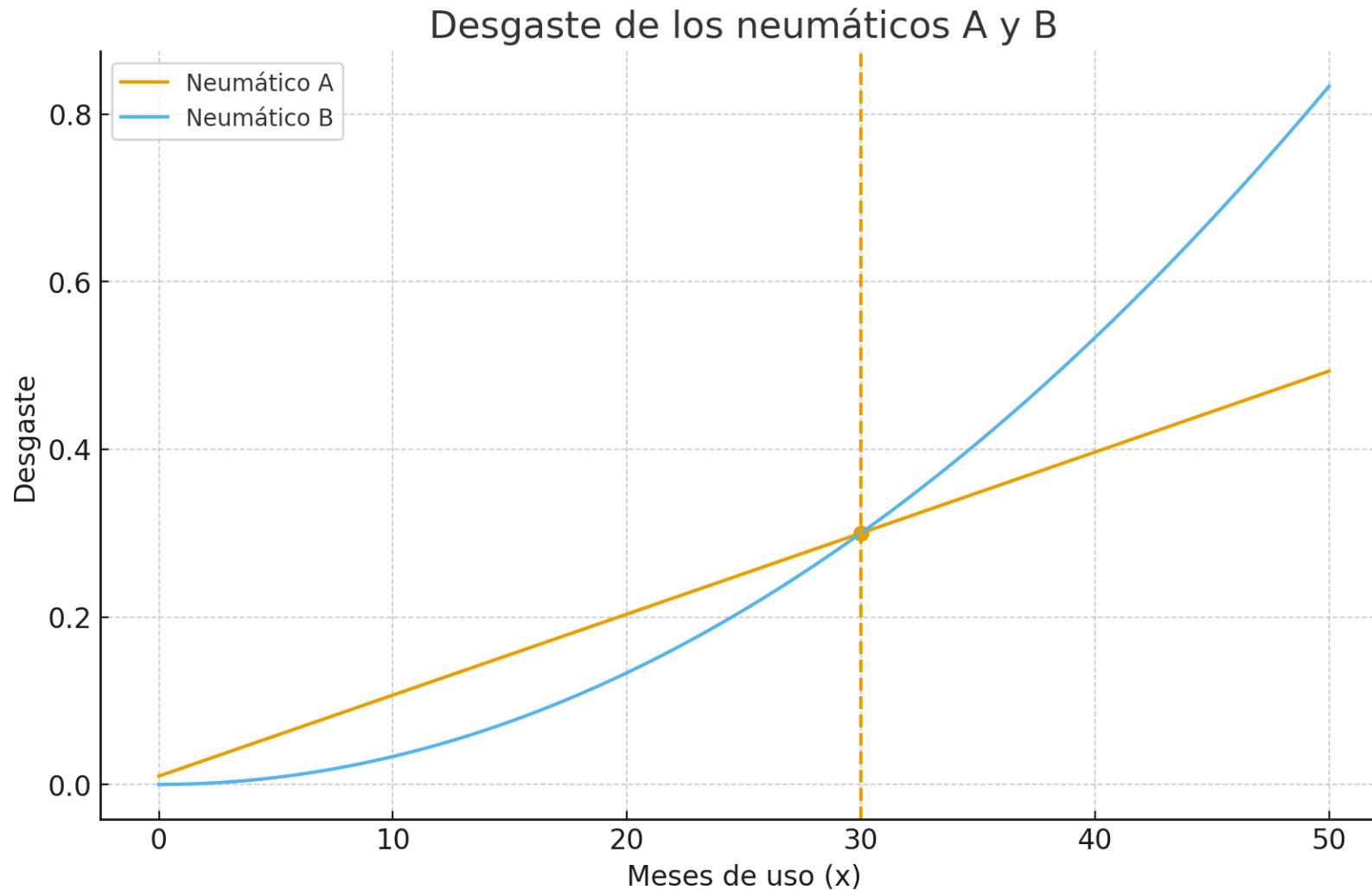
$$D_A(x) = D_B(x) \longrightarrow \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \longrightarrow \frac{30 + 29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \longrightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \end{cases}$$

Se descarta la solución negativa por no pertenecer al dominio de las funciones.

El desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos tras **30 meses** de uso.

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

Como se puede comprobar ambas gráficas se cortan cuando $x = 30$ meses. Ese es el valor de la variable meses de uso para el cual los valores del desgaste son iguales en los neumáticos A y B.



Problema 2A

- b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)

En este caso se resuelve la inecuación correspondiente.

$$D_A(x) < D_B(x) \longrightarrow \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} < \frac{x^2}{3000} \longrightarrow \frac{30 + 29x}{3000} < \frac{x^2}{3000} \longrightarrow x^2 - 29x - 30 > 0$$

Anteriormente habíamos demostrado que en $x = 30$ el polinomio se anulaba. Se hace un estudio de signos.

	0	30	50
$x^2 - 29x - 30$		-	+

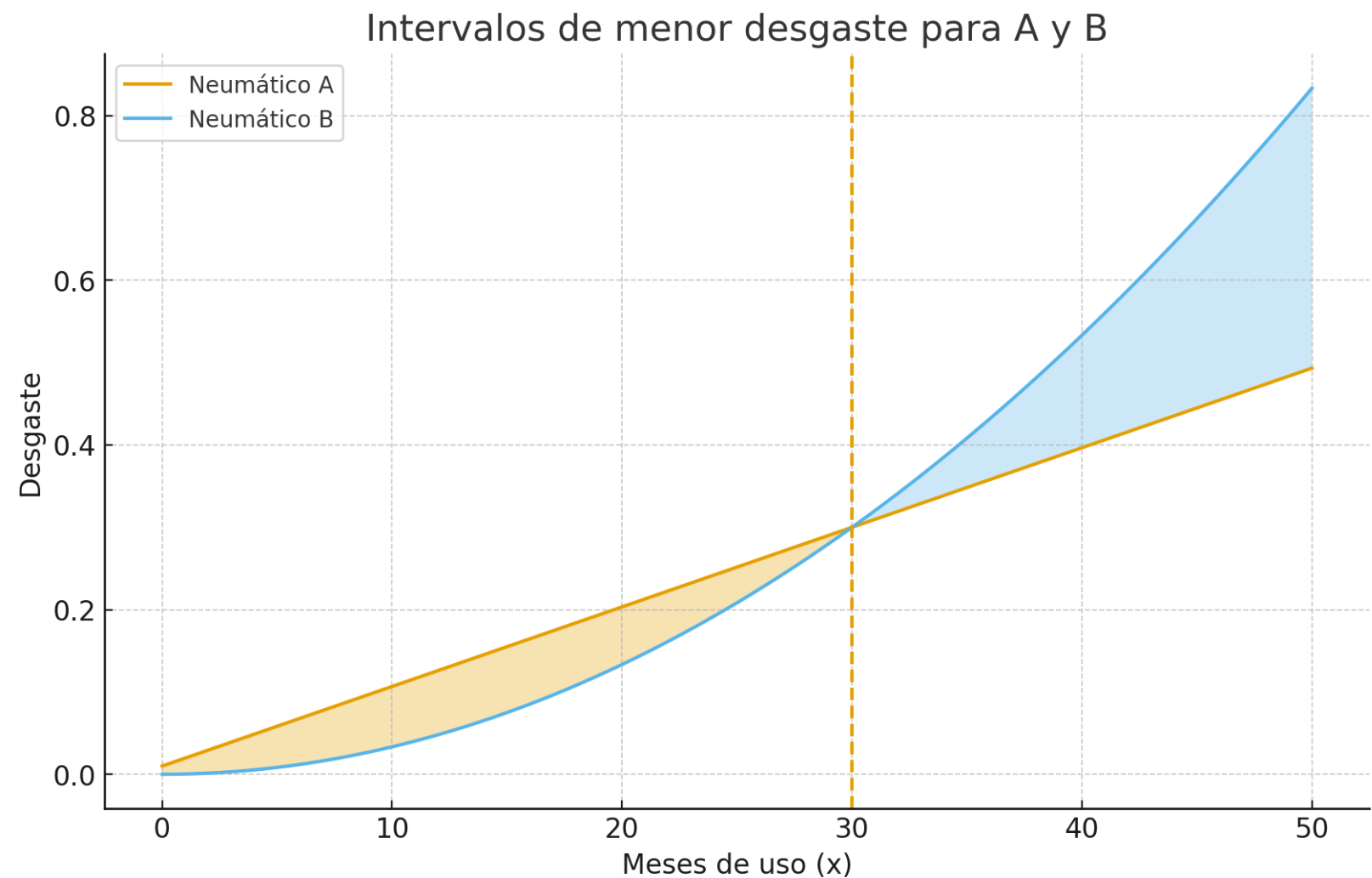
Si $x = 10$; $10^2 - 29 \cdot 10 - 30 = -220 < 0$
Si $x = 40$; $40^2 - 29 \cdot 40 - 30 = 410 > 0$

Por lo tanto, $D_A(x) < D_B(x)$ cuando $30 < x \leq 50$ meses y $D_A(x) > D_B(x)$ cuando $0 \leq x < 30$ meses

El desgaste es menor para el neumático A en el intervalo $(30,50]$
El desgaste es menor para el neumático B en el intervalo $[0,30)$.

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

Es fácil comprobar que por debajo de 30 meses el desgaste es inferior en los neumáticos de tipo B, mientras que, al pasar de los 30 meses de uso, el desgaste es mayor en los neumáticos tipo B.



Problema 2A

- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Se comienza con el primer caso $D_A(x) < D_B(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{30}^{50} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx &= \int_{30}^{50} \left(\frac{x^2}{3000} - \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \right) \right) dx = \\ &= \int_{30}^{50} \left(\frac{x^2}{3000} - \frac{29x}{3000} - \frac{1}{100} \right) dx = \frac{1}{3000} \cdot \int_{30}^{50} x^2 \, dx - \frac{29}{3000} \cdot \int_{30}^{50} x \, dx - \frac{1}{100} \int_{30}^{50} 1 \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{3000} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot x \right]_{30}^{50} = \left(\frac{1}{3000} \cdot \frac{50^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{50^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot 50 \right) - \left(\frac{1}{3000} \cdot \frac{30^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{30^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot 30 \right) \\ \int_{30}^{50} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx &= \frac{47}{36} - \left(-\frac{33}{20} \right) = \frac{133}{45} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A es **133/45** unidades de área.

Problema 2A

- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

$$\begin{aligned}\text{Se hace el otro caso } D_B(x) < D_A(x): \quad & \int_0^{30} (D_A(x) - D_B(x)) \, dx = \int_0^{30} \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \left(\frac{x^2}{3000} \right) \right) dx = \\ & = \int_0^{30} \left(-\frac{x^2}{3000} + \frac{29x}{3000} + \frac{1}{100} \right) dx = \frac{-1}{3000} \cdot \int_0^{30} x^2 \, dx + \frac{29}{3000} \cdot \int_0^{30} x \, dx + \frac{1}{100} \int_0^{30} 1 \, dx = \\ & = \left[\frac{-1}{3000} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot x \right]_0^{30} = \left(\frac{-1}{3000} \cdot \frac{30^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{30^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot 30 \right) - \left(\frac{-1}{3000} \cdot \frac{0^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{0^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot 0 \right) \\ & \int_0^{30} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx = \frac{33}{20} - 0 = \frac{33}{20} \text{ unidades de área}\end{aligned}$$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B es **33/20** unidades de área.

Las áreas coloreadas son las que hemos calculado en el apartado c).

