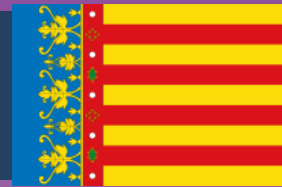




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2025

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1 + x^2}{x(2x + 4) + 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 2B

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Antes de comenzar el ejercicio, opero la expresión de la función para simplificarla.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x \cdot (2x+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2 \cdot (x^2+2x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - (1+x^2)}{2 \cdot (x+1)^2} \\ f(x) &= \frac{x^2+2x+1-1-x^2}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$(x+1)^2 = 0 \longrightarrow x+1 = 0 \longrightarrow x = -1 \quad \text{El Dominio de } f(x) \text{ es:}$$

$$\mathbf{Dom\,} f(x) = \mathbf{R - \{-1\}}$$

Calculo los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje } Y (x=0) \rightarrow f(0) = \frac{0}{(0+1)^2} = 0 \rightarrow \mathbf{A = (0,0)}$$

$$\text{Eje } X (y=0) \rightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \mathbf{A = (0,0)}$$

Problema 2B

Para estudiar la **asíntota vertical**, calculamos el límite en el valor de x que está fuera del dominio.

Calculo el límite de la función en ese valor.

$$\text{En } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

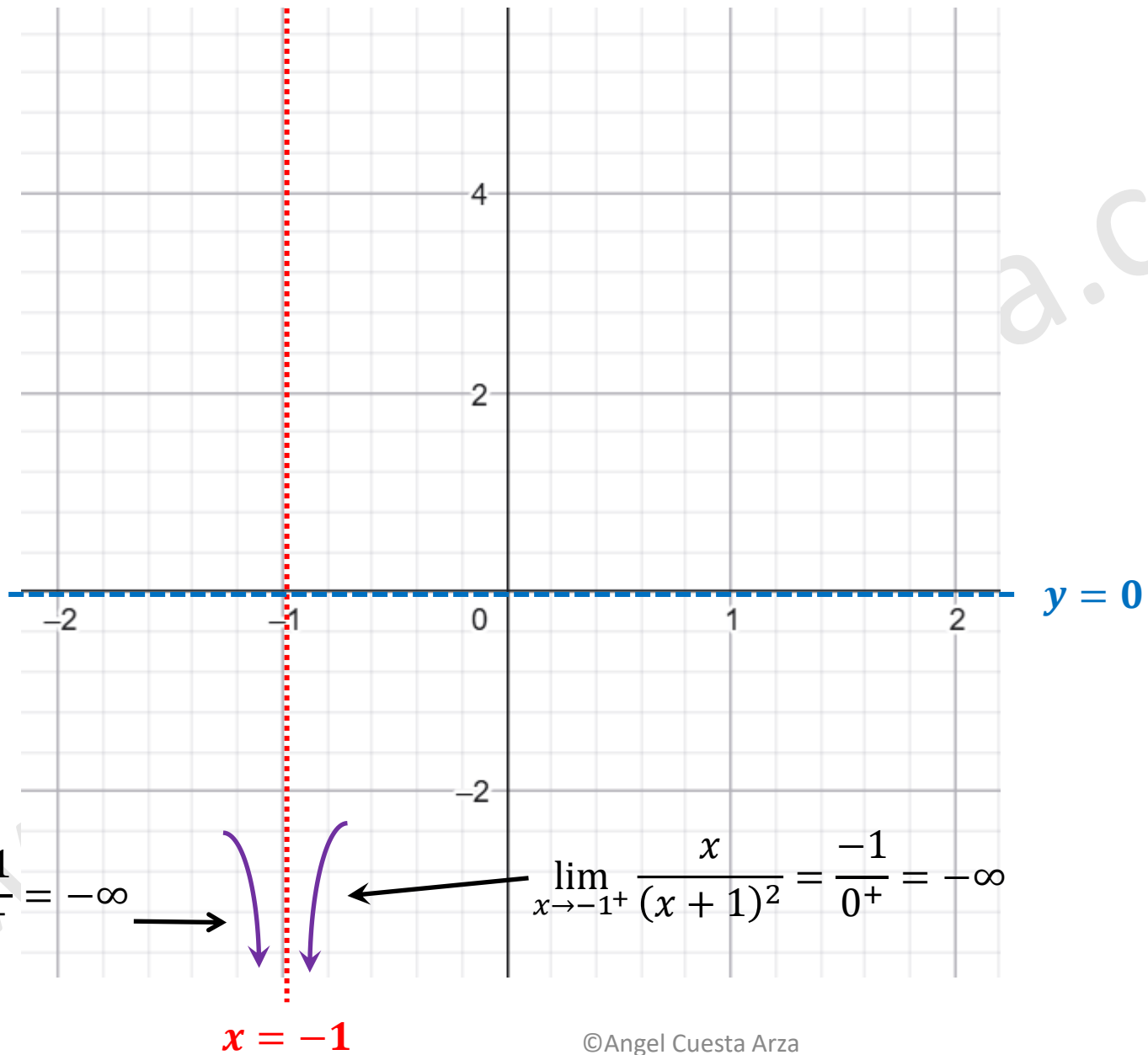
La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$ es A.H. de $f(x)$

No hay asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.



Problema 2B

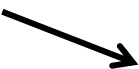
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+1)}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(x+1) \cdot (x+1-2x)}{(x+1)^4} = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero:
$$\frac{-x+1}{(x+1)^3} = 0 \longrightarrow x-1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	$-$
$f(x)$				

$$f'(-2) < 0$$

$$f'(0) > 0$$

$$f'(2) < 0$$

$f(x)$ es **decreciente** si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y **creciente** si $x \in (-1, 1)$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

c) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

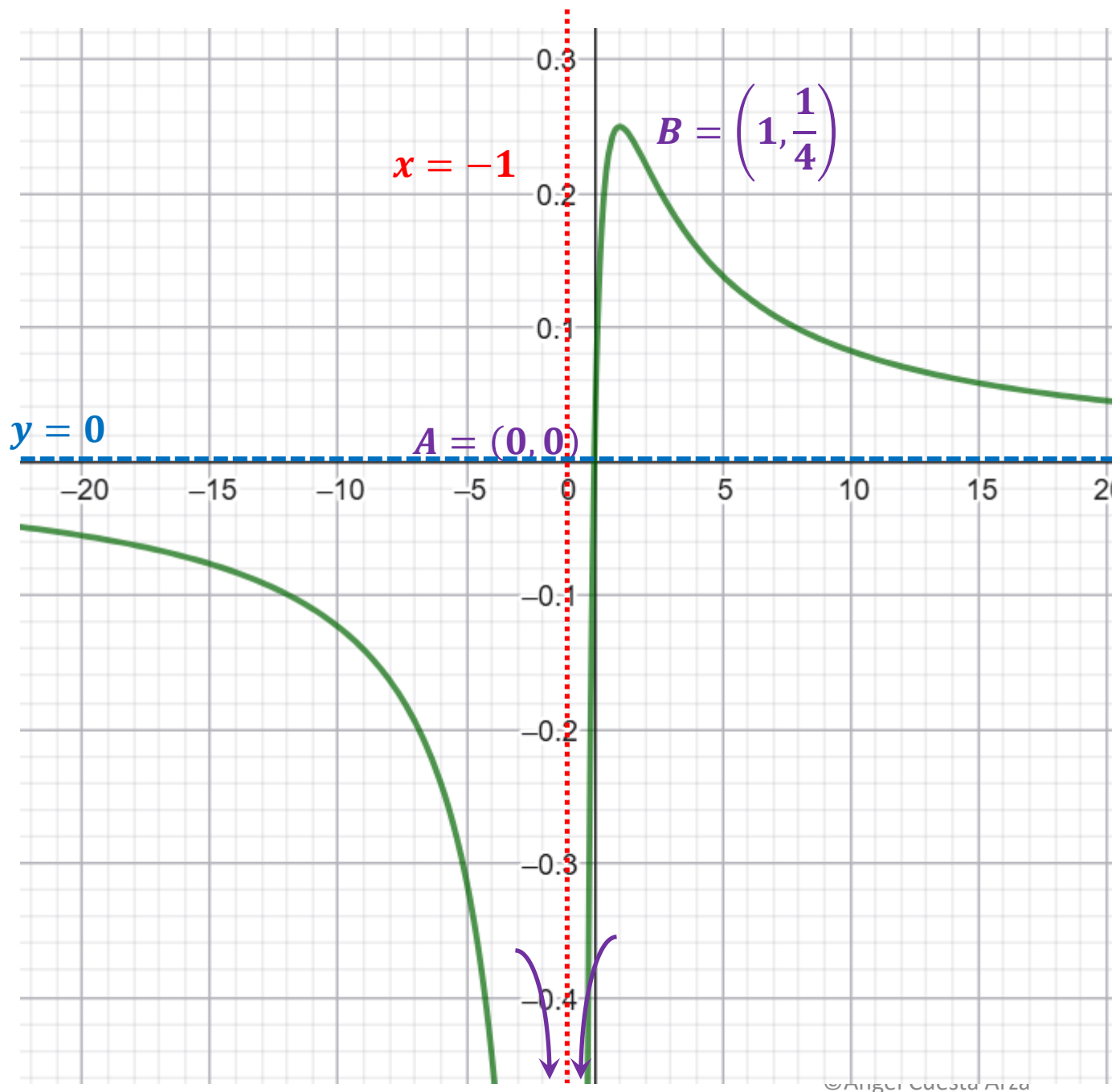
Se observa en el cuadro que la función solo tiene un máximo relativo en $x = 1$. Observa que no tiene mínimo relativo porque el cambio de tendencia en la monotonía en $x = -1$ se produce en un valor de x que no pertenece al dominio de la función.

Se sustituye el único valor obtenido en la función para obtener las coordenadas del máximo relativo.

$$f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Las coordenadas del máximo relativo son:

$$B = \left(1, \frac{1}{4}\right)$$



Como no disponemos de casi ningún punto para la representación gráfica, el día del examen deberemos conformarnos con esbozar la gráfica. Es imposible obtener una representación gráfica precisa. Recuerda que hay que representar la gráfica a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Por otro lado, se utiliza la escala conveniente para poder visualizar bien el máximo relativo de la función (que, vista la gráfica, también podemos decir que es máximo absoluto).