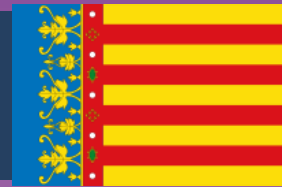




PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2025

Programación lineal

© Ángel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Julio 2021



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019



PROBLEMA 1A

Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible?

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

Solución: En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

Resumimos los datos del problema en una tabla.

x = número de excursiones a la montaña.
 y = número de excursiones a la playa.

		Autobuses	Guías	Beneficio
Número de excursiones a la montaña	x	$2x$	$2x$	$700x$ (€)
Número de excursiones a la playa	y	$2y$	y	$500y$ (€)

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

PROBLEMA 1A

		Autobuses	Guías	Beneficio
Número de excursiones a la montaña	x	$2x$	$2x$	$700x$ (€)
Número de excursiones a la playa	y	$2y$	y	$500y$ (€)

A partir de la tabla y del enunciado planteamos las restricciones:

“La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones.”

“restricciones triviales”

$$\left. \begin{array}{l} \longrightarrow 2x + 2y \leq 10 \\ \longrightarrow 2x + y \leq 8 \\ \longrightarrow x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La función objetivo está definida por el beneficio: $z = 700x + 500y$

PROBLEMA 1A

Quedando el planteamiento definitivo así: En primer lugar, hacemos los cálculos para representar las inecuaciones.

Maximizar: $z = 700x + 500y$

$$\text{s. a. } \begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

(a) $2x + 2y \leq 10$

Expresamos la recta: $2x + 2y = 10$

Tomamos dos puntos para representarla:

x	y
0	5
5	0

Comprobamos si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación **(0, 0)**

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 10 \rightarrow \text{Si Cumple; } (0, 0) \in \{2x + 2y \leq 10\}$$

(b) $2x + y \leq 8$

Expresamos la recta: $2x + y = 8$

Tomamos dos puntos para representarla:

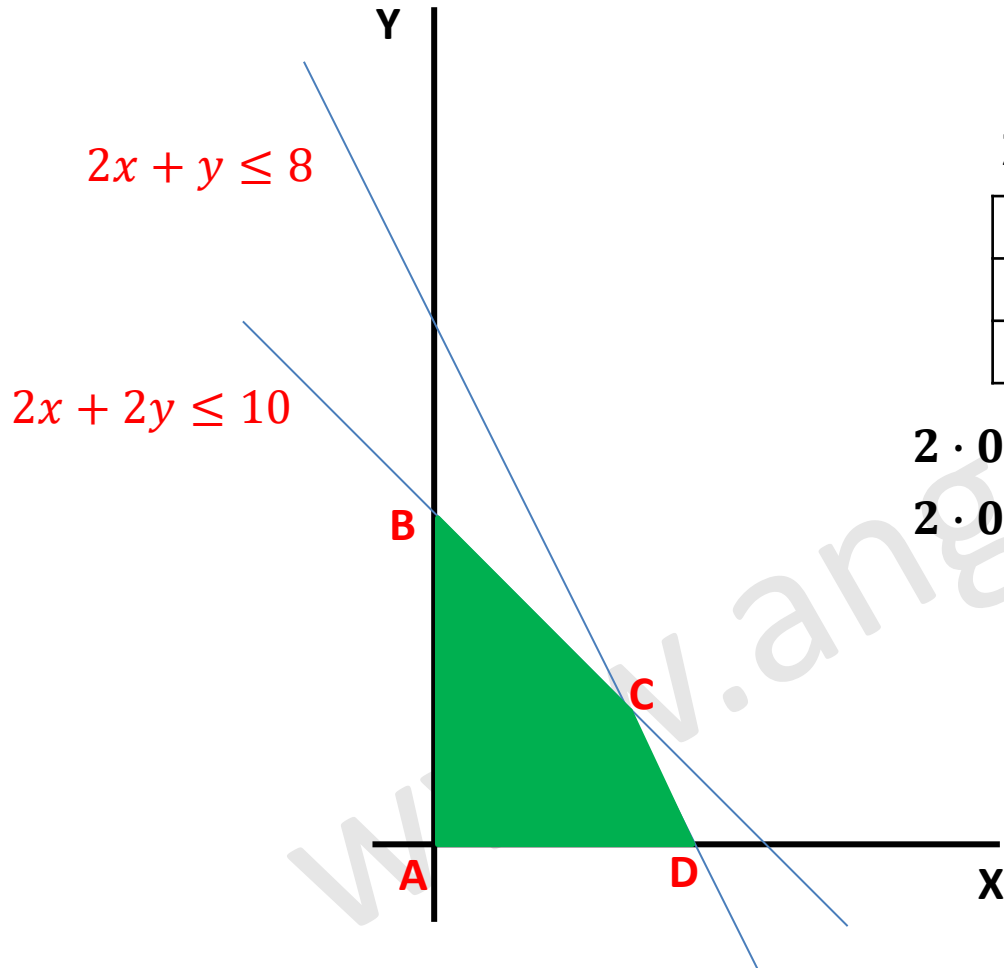
x	y
0	8
4	0

Comprobamos si (0,0) pertenece a la solución
sustituyendo en la inecuación **(0, 0)**

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 8 \rightarrow \text{Si Cumple; } (0, 0) \in \{2x + y \leq 8\}$$

PROBLEMA 1A

Representamos las inecuaciones y observamos cuál es la región factible. $s. a. \begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$



$$2x + 2y = 10$$

x	y
0	5
5	0

$$2x + y = 8$$

x	y
0	8
4	0

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 10; (0, 0) \in \{2x + 2y \leq 10\}$$

$$2 \cdot 0 + 0 \leq 8; (0, 0) \in \{2x + y \leq 8\}$$

PROBLEMA 1A

Para calcular las coordenadas del vértice C, se debe resolver el sistema de ecuaciones formado por las rectas que dan lugar a dicho vértice. Los vértices A, B y D no hace falta calcularlos, porque ya disponemos de sus coordenadas (son los puntos de corte con los ejes).

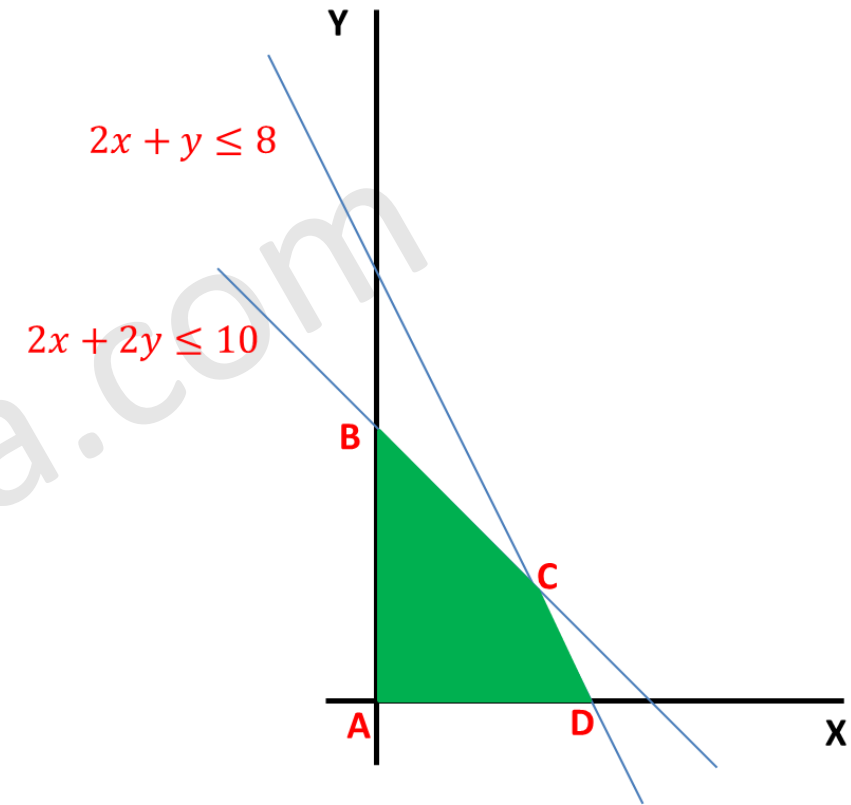
Vértice C:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Resolvemos utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Las coordenadas del vértice C son: $C = (3, 2)$

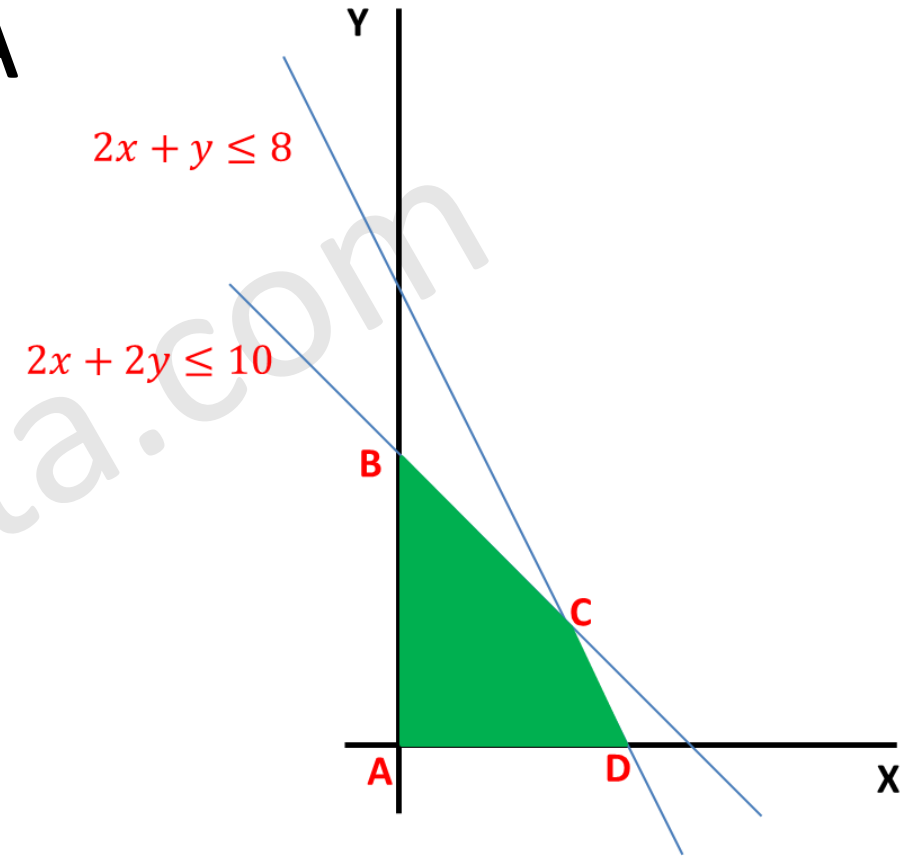
Las coordenadas del resto de vértices son: $A = (0, 0)$; $B(0, 5)$ y $D(4, 0)$



PROBLEMA 1A

El máximo de la función z en la región se alcanzará en alguno de los vértices de la región. Calculo los valores de la función en los vértices.

x	y	$z = 700x + 500y$
0	0	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 0 = 0$
0	5	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 5 = 2500$
3	2	$700 \cdot 3 + 500 \cdot 2 = 3100$
4	0	$700 \cdot 4 + 500 \cdot 0 = 2800$



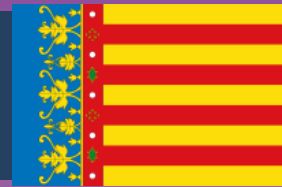
PROBLEMA 1A

Solución: debe hacer **3 excursiones a la montaña y 2 excursiones a la playa**. Con esta combinación, cumplirá las restricciones dadas y el beneficio será de **3100 euros**.

x	y	$z = 700x + 500y$
0	0	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 0 = 0$
0	5	$700 \cdot 0 + 500 \cdot 5 = 2500$
3	2	$700 \cdot 3 + 500 \cdot 2 = 3100$ (máximo)
4	0	$700 \cdot 4 + 500 \cdot 0 = 2800$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 1B

JULIO 2025

Álgebra matricial



PROBLEMA 1B

Problema 1. B. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . *(2,5 puntos)*

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal. *(1 punto)*

www.a.

PROBLEMA 1B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

Se despeja X aplicando las propiedades de las matrices.

$$2XA + B^t C = I \rightarrow 2XA = I - B^t C \rightarrow XA = \frac{1}{2}(I - B^t C) \rightarrow XA \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

$$X \cdot I = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Para calcular X , debemos calcular previamente $I - B^t C$ y C^{-1} .

$$B^t C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - B^t C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ Se calcula la matriz inversa de A a continuación.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ mediante el método de los adjuntos. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 1B

- a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^t C = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B . (2,5 puntos)

$$X = \frac{1}{2}(I - B^t C) \cdot A^{-1}$$

Calculo la matriz X :

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 0 & 8 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) & 8 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 57 & -15 \\ 6 & 9 & -1 \\ 24 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ AD es diagonal. (1 punto)

Calculo la matriz $A \cdot D$:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot z \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot z \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot z \end{pmatrix}$$

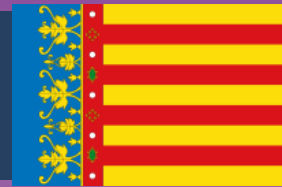
$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 + 2z \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz $A \cdot D$ será diagonal si los elementos a_{13} y a_{23} son nulos: $\begin{cases} -1 + 2z = 0 \\ 1 - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow z = \frac{1}{2}$

$$z = \frac{1}{2}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2025

Funciones

©Angel Cuesta Arza



Problema 2. A. Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste D_A tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste D_B para un neumático B tras x meses de uso, para x entre 0 y 50, viene dado por la función $D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

- a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. *(1 punto)*
- b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. *(1 punto)*
- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. *(1,5 puntos)*

Problema 2A

- a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)

Para calcular el número de meses que deben transcurrir para que el desgaste sea el mismo para los dos tipos de neumáticos debemos igualar las funciones D_A y D_B . A continuación, se despeja x , que será el número de meses pedido.

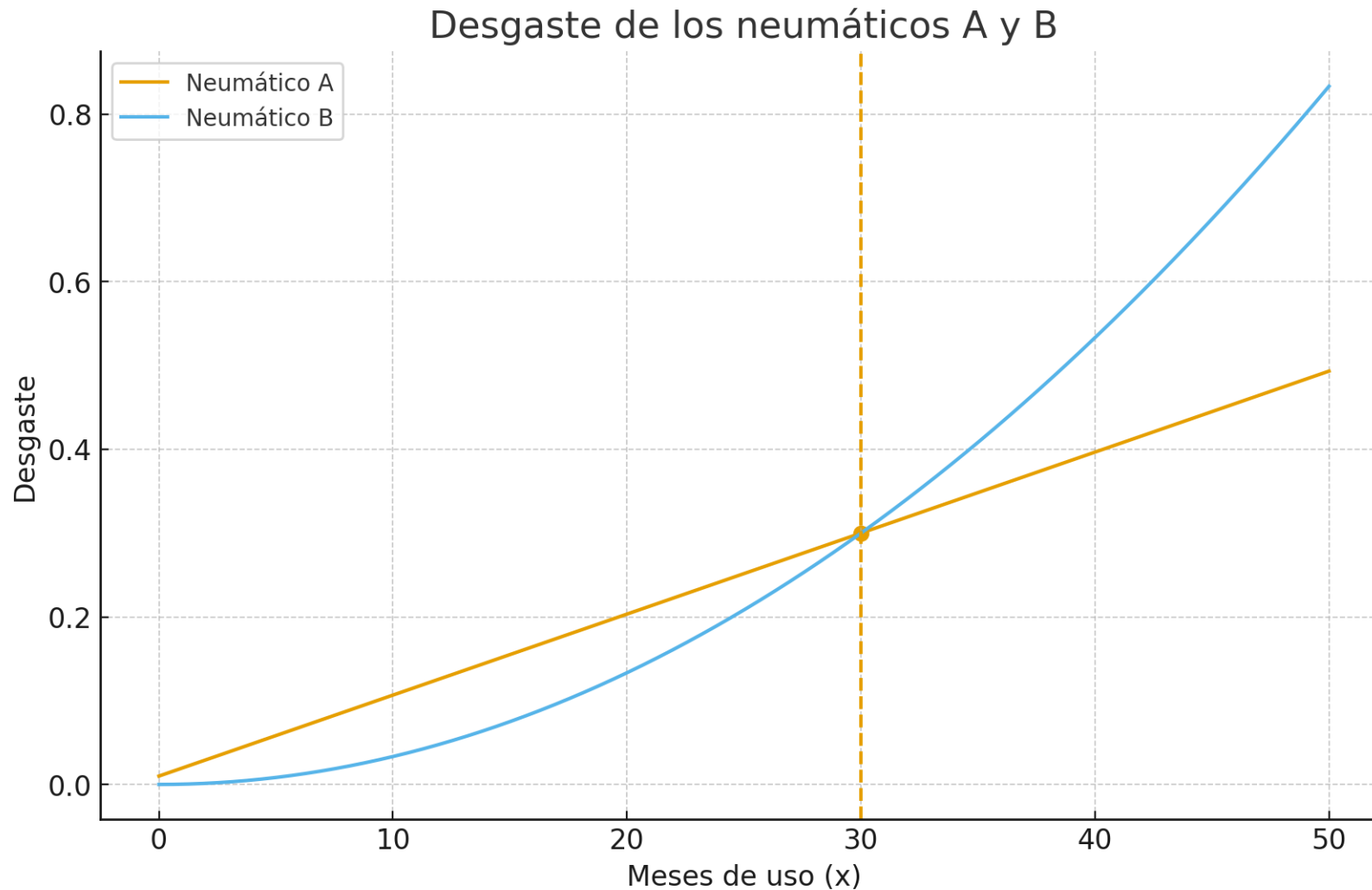
$$D_A(x) = D_B(x) \longrightarrow \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \longrightarrow \frac{30 + 29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \longrightarrow x^2 - 29x - 30 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 30 \end{cases}$$

Se descarta la solución negativa por no pertenecer al dominio de las funciones.

El desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos tras **30 meses** de uso.

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

Como se puede comprobar ambas gráficas se cortan cuando $x = 30$ meses. Ese es el valor de la variable meses de uso para el cual los valores del desgaste son iguales en los neumáticos A y B.



Problema 2A

- b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)

En este caso se resuelve la inecuación correspondiente.

$$D_A(x) < D_B(x) \longrightarrow \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} < \frac{x^2}{3000} \longrightarrow \frac{30 + 29x}{3000} < \frac{x^2}{3000} \longrightarrow x^2 - 29x - 30 > 0$$

Anteriormente habíamos demostrado que en $x = 30$ el polinomio se anulaba. Se hace un estudio de signos.

	0	30	50
$x^2 - 29x - 30$		-	+

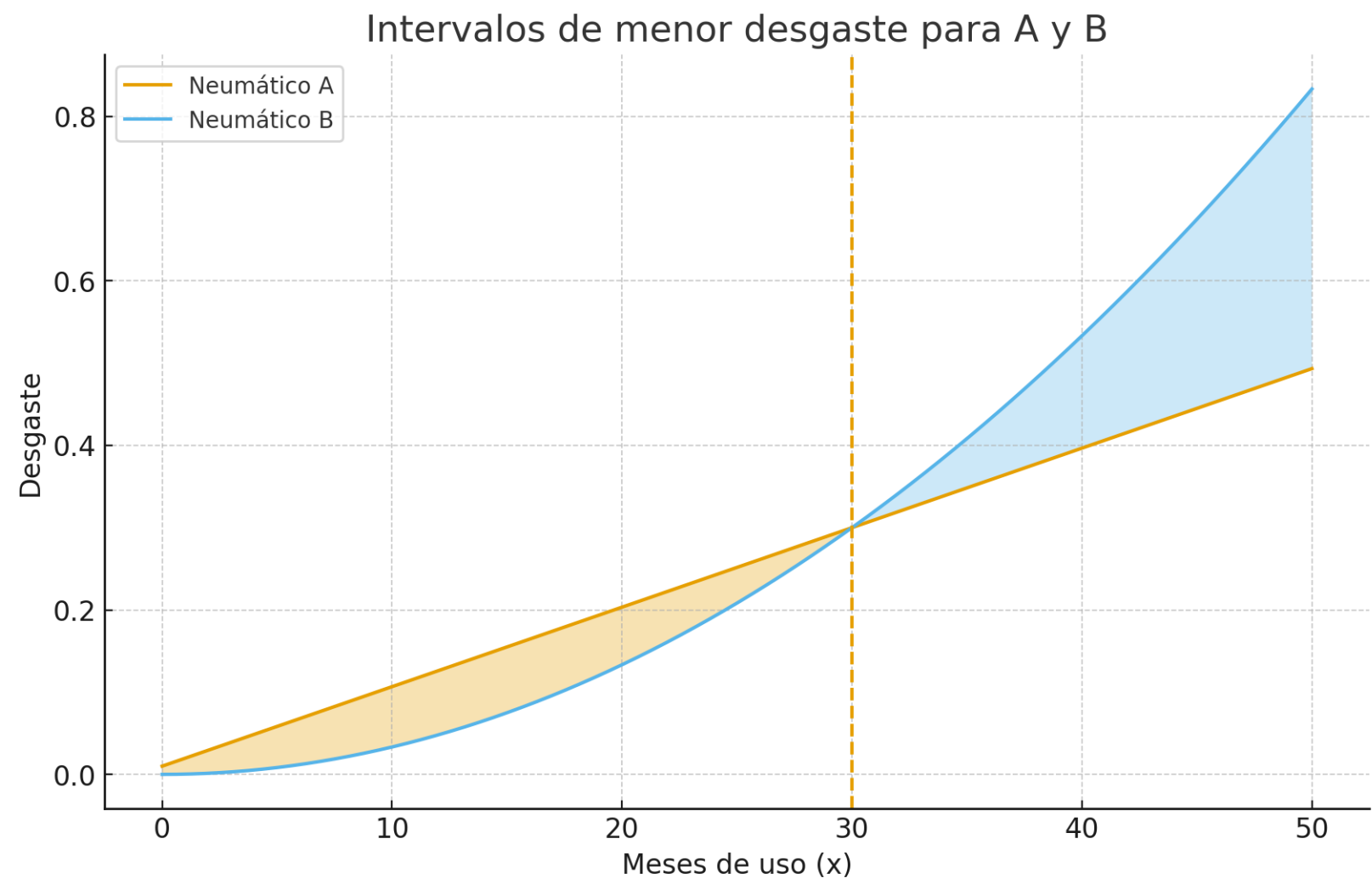
Si $x = 10$; $10^2 - 29 \cdot 10 - 30 = -220 < 0$
Si $x = 40$; $40^2 - 29 \cdot 40 - 30 = 410 > 0$

Por lo tanto, $D_A(x) < D_B(x)$ cuando $30 < x \leq 50$ meses y $D_A(x) > D_B(x)$ cuando $0 \leq x < 30$ meses

El desgaste es menor para el neumático A en el intervalo $(30,50]$
El desgaste es menor para el neumático B en el intervalo $[0,30)$.

Se ilustra a continuación con una gráfica la situación propuesta en el ejercicio.

Es fácil comprobar que por debajo de 30 meses el desgaste es inferior en los neumáticos de tipo B, mientras que, al pasar de los 30 meses de uso, el desgaste es mayor en los neumáticos tipo B.



Problema 2A

- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Se comienza con el primer caso $D_A(x) < D_B(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{30}^{50} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx &= \int_{30}^{50} \left(\frac{x^2}{3000} - \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \right) \right) dx = \\ &= \int_{30}^{50} \left(\frac{x^2}{3000} - \frac{29x}{3000} - \frac{1}{100} \right) dx = \frac{1}{3000} \cdot \int_{30}^{50} x^2 \, dx - \frac{29}{3000} \cdot \int_{30}^{50} x \, dx - \frac{1}{100} \int_{30}^{50} 1 \, dx = \\ &= \left[\frac{1}{3000} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot x \right]_{30}^{50} = \left(\frac{1}{3000} \cdot \frac{50^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{50^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot 50 \right) - \left(\frac{1}{3000} \cdot \frac{30^3}{3} - \frac{29}{3000} \cdot \frac{30^2}{2} - \frac{1}{100} \cdot 30 \right) \\ \int_{30}^{50} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx &= \frac{47}{36} - \left(-\frac{33}{20} \right) = \frac{133}{45} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A es **133/45** unidades de área.

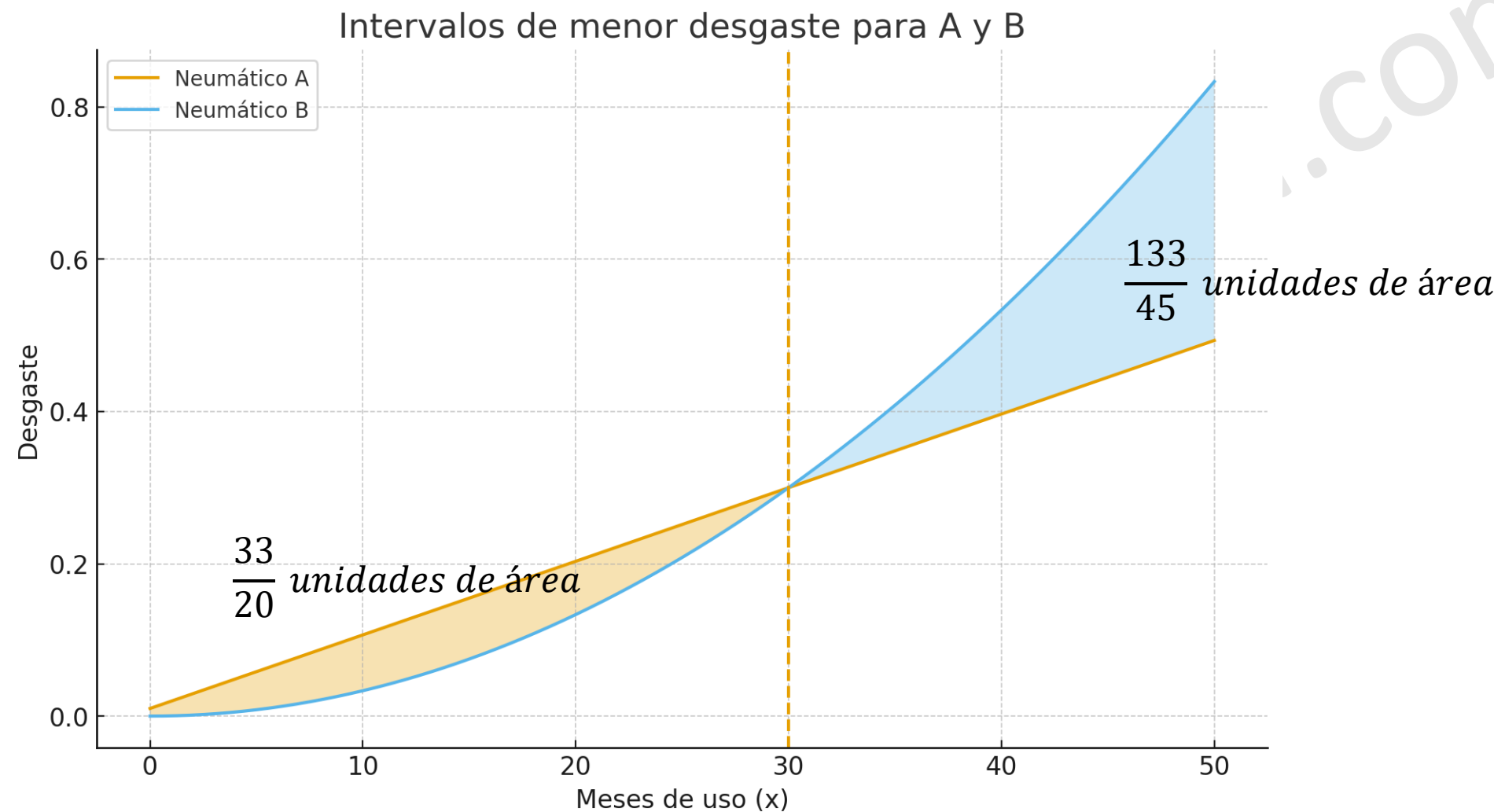
Problema 2A

- c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

$$\begin{aligned}\text{Se hace el otro caso } D_B(x) < D_A(x): \quad & \int_0^{30} (D_A(x) - D_B(x)) \, dx = \int_0^{30} \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \left(\frac{x^2}{3000} \right) \right) dx = \\ & = \int_0^{30} \left(-\frac{x^2}{3000} + \frac{29x}{3000} + \frac{1}{100} \right) dx = \frac{-1}{3000} \cdot \int_0^{30} x^2 \, dx + \frac{29}{3000} \cdot \int_0^{30} x \, dx + \frac{1}{100} \int_0^{30} 1 \, dx = \\ & = \left[\frac{-1}{3000} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot x \right]_0^{30} = \left(\frac{-1}{3000} \cdot \frac{30^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{30^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot 30 \right) - \left(\frac{-1}{3000} \cdot \frac{0^3}{3} + \frac{29}{3000} \cdot \frac{0^2}{2} + \frac{1}{100} \cdot 0 \right) \\ & \int_0^{30} (D_B(x) - D_A(x)) \, dx = \frac{33}{20} - 0 = \frac{33}{20} \text{ unidades de área}\end{aligned}$$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B es **33/20** unidades de área.

Las áreas coloreadas son las que hemos calculado en el apartado c).





PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2025

Análisis de funciones

©Ángel Cuesta Arza



OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



**Funciones racionales paso a paso.
8 ejercicios.
Nivel Bachillerato.**

<https://youtu.be/kONbgIMSFpU>



Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1 + x^2}{x(2x + 4) + 2}$$

Se pide:

- a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
- b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
- d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 2B

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x(2x+4)+2}$$

Antes de comenzar el ejercicio, opero la expresión de la función para simplificarla.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{x \cdot (2x+4)+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2x^2+4x+2} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2 \cdot (x^2+2x+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1+x^2}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - (1+x^2)}{2 \cdot (x+1)^2} \\ f(x) &= \frac{x^2+2x+1-1-x^2}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{2x}{2 \cdot (x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$(x+1)^2 = 0 \longrightarrow x+1 = 0 \longrightarrow x = -1 \quad \text{El Dominio de } f(x) \text{ es:}$$

$$\mathbf{Dom\ } f(x) = \mathbf{R - \{-1\}}$$

Calculo los puntos de corte con los ejes:

$$\text{Eje Y (} x=0 \text{)} \rightarrow f(0) = \frac{0}{(0+1)^2} = 0 \rightarrow \mathbf{A = (0, 0)}$$

$$\text{Eje X (} y=0 \text{)} \rightarrow \frac{x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \mathbf{A = (0, 0)}$$

Problema 2B

Para estudiar la **asíntota vertical**, calculamos el límite en el valor de x que está fuera del dominio.

Calculo el límite de la función en ese valor.

$$\text{En } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función en el último apartado.

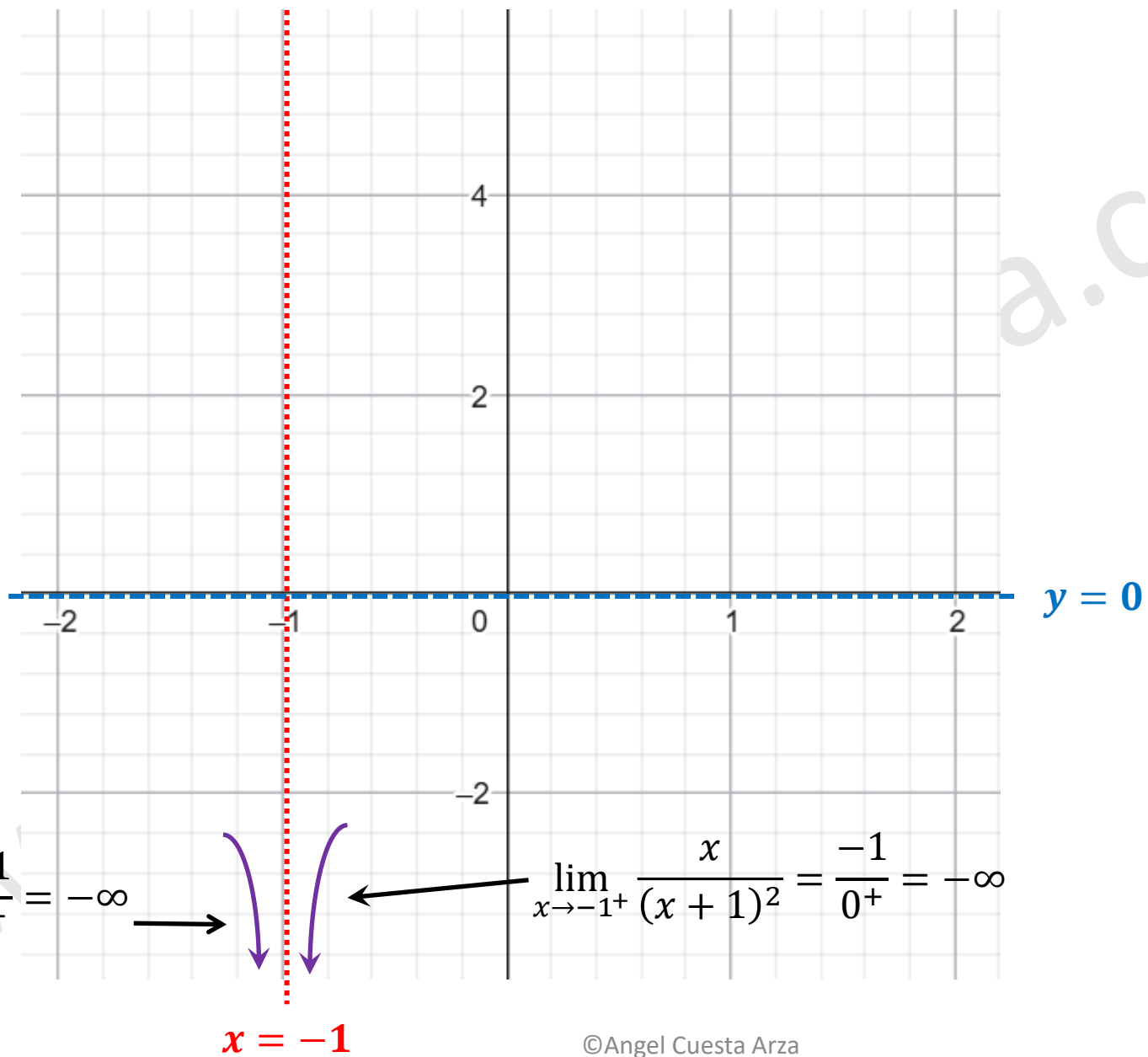
La **asíntota horizontal** se calcula con el límite de la función, en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Por lo tanto, $y = 0$ es A.H. de $f(x)$

No hay asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.



Problema 2B

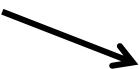
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x+1)}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(x+1) \cdot (x+1-2x)}{(x+1)^4} = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero:
$$\frac{-x+1}{(x+1)^3} = 0 \longrightarrow x-1 = 0 \longrightarrow x = 1$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	$-$
$f(x)$				

$$f'(-2) < 0$$

$$f'(0) > 0$$

$$f'(2) < 0$$

$f(x)$ es **decreciente** si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y **creciente** si $x \in (-1, 1)$

Problema 2B

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

c) Los máximos y mínimos locales, si existen.

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$				

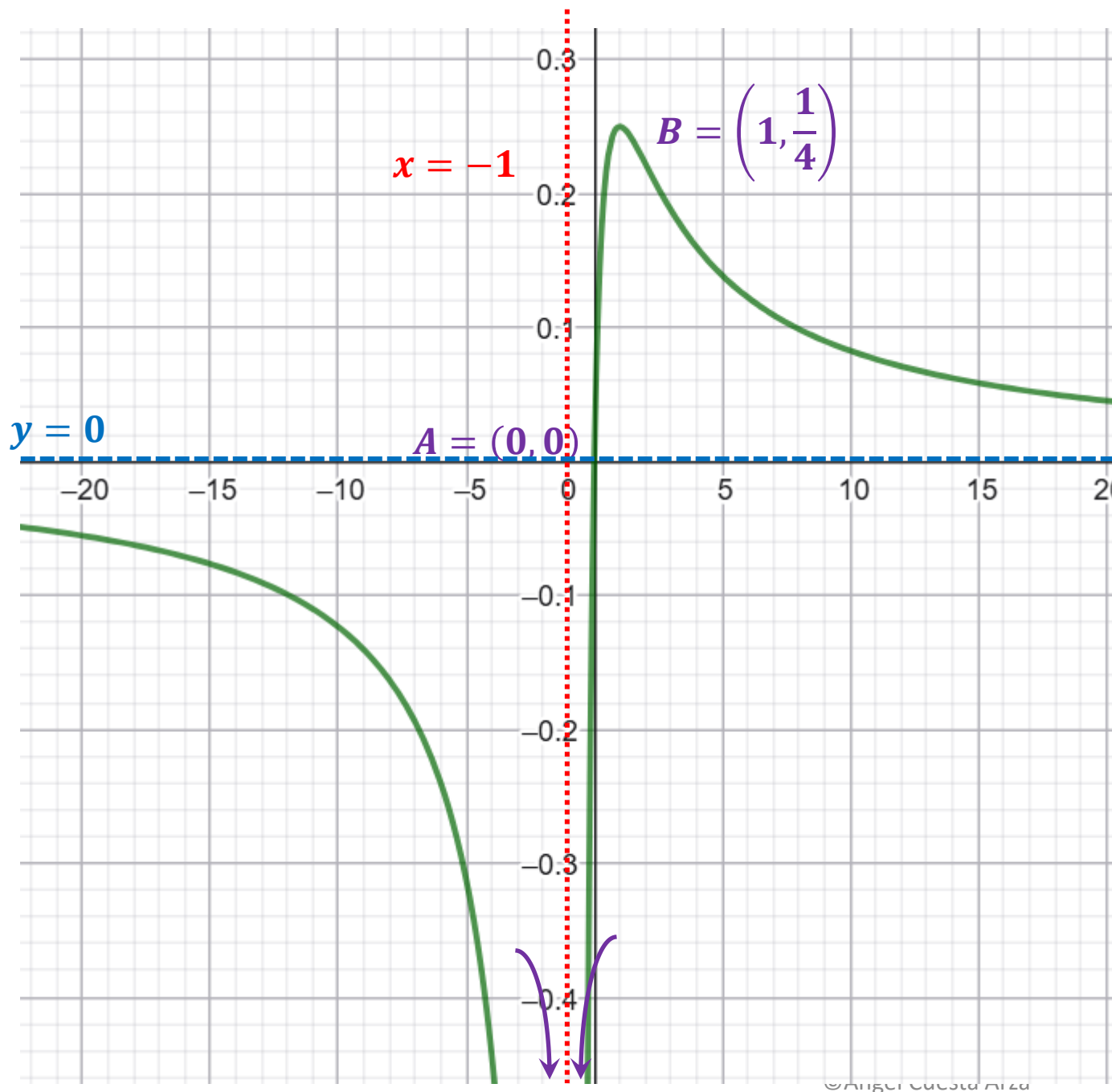
Se observa en el cuadro que la función solo tiene un máximo relativo en $x = 1$. Observa que no tiene mínimo relativo porque el cambio de tendencia en la monotonía en $x = -1$ se produce en un valor de x que no pertenece al dominio de la función.

Se sustituye el único valor obtenido en la función para obtener las coordenadas del máximo relativo.

$$f(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Las coordenadas del máximo relativo son:

$$B = \left(1, \frac{1}{4}\right)$$

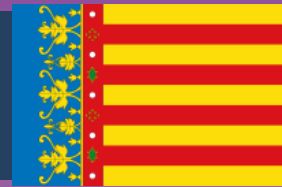


Como no disponemos de casi ningún punto para la representación gráfica, el día del examen deberemos conformarnos con esbozar la gráfica. Es imposible obtener una representación gráfica precisa. Recuerda que hay que representar la gráfica a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Por otro lado, se utiliza la escala conveniente para poder visualizar bien el máximo relativo de la función (que, vista la gráfica, también podemos decir que es máximo absoluto).



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 3

JULIO 2025

Probabilidad

©Angel Cuesta Arza



VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

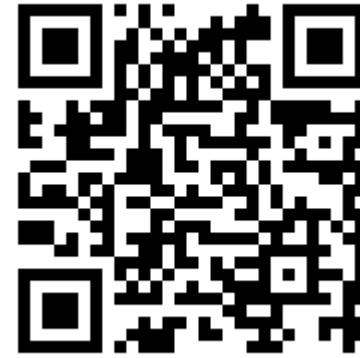
No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Curso de repaso de
probabilidad básica



Álgebra de conjuntos.
Fórmulas de la probabilidad.



Teorema de la probabilidad
total y teorema de Bayes



Problema 3

Una ciudad está implementando un programa de sostenibilidad ambiental. Como parte de este programa, los residentes tienen la opción de participar en dos actividades: limpieza de parques y plantación de árboles. Para evaluar el impacto de esta iniciativa, se realizó una encuesta a 2.000 ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Seleccionamos al azar a uno de estos ciudadanos.

- a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades.
- b) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en la plantación de árboles.
- c) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades.
- d) Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques.

Solución: Se definen los sucesos: $LP = \{\text{El ciudadano participa en la limpieza de parques}\}$
 $PA = \{\text{El ciudadano participa en la plantación de árboles}\}$

Lo más cómodo es plantear una **tabla de contingencia** con los datos del enunciado.

Problema 3

“...se realizó una encuesta a 2.000 ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas.”

a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades.

Se construye la tabla de contingencia.

	PA	$\overline{PA}$	Total
LP	300	500	800
$\overline{LP}$	1100	100	1200
Total	1400	600	2000

Problema 3

a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades.

	PA	$\overline{PA}$	Total
LP	300	500	800
$\overline{LP}$	1100	100	1200
Total	1400	600	2000

$$P(LP \cup PA) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{300 + 500 + 1100}{2000} = \frac{1900}{2000} = \frac{19}{20} = 0,95$$

La probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades **0,95**.

Problema 3

b) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en la plantación de árboles.

	PA	$\overline{PA}$	Total
LP	300	500	800
$\overline{LP}$	1100	100	1200
Total	1400	600	2000

$$P(LP \cap \overline{PA}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en la plantación de árboles es **0,25**.

Problema 3

c) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades.

	PA	$\overline{PA}$	Total
LP	300	500	800
$\overline{LP}$	1100	100	1200
Total	1400	600	2000

$$P(\text{Solo } PA) + P(\text{Solo } LP) = P(\overline{LP} \cap PA) + P(LP \cap \overline{PA}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{1100}{2000} + \frac{500}{2000} = \frac{1600}{2000} = 0,8$$

La probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades es **0,8**.

Problema 3

d) Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques.

	PA	$\overline{PA}$	Total
LP	300	500	800
$\overline{LP}$	1100	100	1200
Total	1400	600	2000

$$P(\overline{LP}/\overline{PA}) = \frac{P(\overline{LP} \cap \overline{PA})}{P(\overline{PA})} = \frac{100/2000}{600/2000} = \frac{1}{6} \approx 0,1667$$

Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques es **1/6**.