



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS

CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2026

Análisis de funciones

©Angel Cuesta Arza



Problema 2. A. Tras un vertido químico accidental en un estanque, la concentración en partes por millón (ppm) de tóxico evoluciona durante las primeras 15 horas según la siguiente función, donde t representa el tiempo en horas:

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + a & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

- a) Halla el valor de a sabiendo que $C(t)$ es una función continua en el intervalo $[0,15]$.
(0,5 puntos)
- b) Halla el instante en el que la concentración es máxima en el intervalo de tiempo $[0,6]$ y determina si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas.
(1 punto)
- c) Justifica si la concentración ha ido reduciéndose en todo momento en el tramo $]6,15]$.
(0,5 puntos)
- d) Se debe emitir una alerta siempre que la concentración supere las 20 ppm. Determina todos los intervalos de tiempo en los que la alerta debe estar activada.
(1,5 puntos)

Problema 2A

a) Halla el valor de a sabiendo que $C(t)$ es una función continua en el intervalo $[0,15]$.

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + a & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

Solo hay que estudiar la continuidad en $t = 6$. Cada tramo es continuo en su intervalo y el denominador $t + 1$ solo se anula en $t = -1$, fuera del segundo tramo.

Se estudia la continuidad de la función en $t = 6$.

$$C(6) = -6^2 + 8 \cdot 6 + a = 12 + a$$

$$\lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} -t^2 + 8t + a = 12 + a$$

$$\lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} \frac{12t + 89}{t + 1} = 23$$

$$\lim_{t \rightarrow 6^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow 6^+} C(t) \rightarrow 12 + a = 23 \rightarrow a = 11$$

El valor de a para que $C(t)$ sea continua es : **$a = 11$** .

Problema 2A

b) Halla el instante en el que la concentración es máxima en el intervalo de tiempo $[0,6]$ y determina si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas.

$$C(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 11, & 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{12t + 89}{t + 1}, & 6 < t \leq 15 \end{cases}$$

Con $a = 11$, se calcula la derivada por tramos y se comparan los puntos críticos con los extremos del intervalo.

Se muestra el cálculo de la parte racional de la función. La derivada del primer tramo es evidente.

$$C_2'(t) = \frac{12 \cdot (t + 1) - (12t + 89) \cdot 1}{(t + 1)^2} = \frac{12t + 12 - 12t - 89}{(t + 1)^2} = \frac{-77}{(t + 1)^2}$$

Quedando la función derivada así:

$$C'(t) = \begin{cases} -2t + 8, & 0 < t < 6 \\ \frac{-77}{(t + 1)^2}, & 6 < t < 15 \end{cases}$$

En el primer tramo se localiza el punto crítico y se comparan los valores relevantes. El segundo tramo nunca se anula.

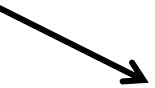
$$-2t + 8 = 0 \longrightarrow t = 4 \in [0,6]$$

Problema 2A

$$C'(t) = \begin{cases} -2t + 8, & 0 < t < 6 \\ \frac{-77}{(t+1)^2}, & 6 < t < 15 \end{cases}$$

b) Halla el instante en el que la concentración es máxima en el intervalo de tiempo $[0,6]$ y determina si el valor obtenido es el máximo absoluto durante las 15 horas.

Se estudia el signo de la función derivada en cada uno de los tramos. Se supone $a = 11$ a partir de ahora.

	0	4	6	15
$C'(t)$		+	-	-
$C(t)$				

$$C'(1) = -2 \cdot 1 + 8 > 0$$

$$C'(5) = -2 \cdot 5 + 8 < 0$$

$$C'(10) = \frac{-77}{(10+1)^2} < 0$$

La concentración aumenta desde $t = 0$ hasta $t = 4$ y disminuye desde ese instante hasta $t = 15$. Por tanto, **el máximo absoluto se alcanza a las 4 horas** y su valor es **$C(4) = 27 \text{ ppm}$** .

c) Justifica si la concentración ha ido reduciéndose en todo momento en el tramo $]6,15]$

Se ha comprobado que $C'(t) < 0$ en el intervalo $6 < t < 15$. Por tanto, $C(t)$ es estrictamente decreciente en todo el tramo $]6, 15]$. Por consiguiente, **la concentración ha ido reduciéndose en todo ese tiempo**.

Problema 2A

d) Se debe emitir una alerta siempre que la concentración supere las 20 ppm. Determina todos los intervalos de tiempo en los que la alerta debe estar activada.

En este caso se resuelve la inecuación correspondiente. $C(t) > 20 \longrightarrow \begin{cases} -t^2 + 8t + 11 > 20 \rightarrow -t^2 + 8t - 9 > 0 \\ \frac{12t + 89}{t + 1} > 20 \rightarrow -8t + 69 > 0 \end{cases}$

Se resuelve la inecuación de segundo grado. Para ello necesito resolver en primer lugar la ecuación de segundo grado.

$$-t^2 + 8t - 9 = 0 \longrightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 36}}{-2} = \frac{-8 \pm \sqrt{28}}{-2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{7}}{-2} \longrightarrow \begin{cases} t = \frac{-8 + 2\sqrt{7}}{-2} \\ t = \frac{-8 - 2\sqrt{7}}{-2} \end{cases}$$

Se comprueba si las soluciones pertenecen al dominio.

$$t = \frac{-8 + 2\sqrt{7}}{-2} = 4 - \sqrt{7} \approx 1,35 \in [0,6]$$

$$t = \frac{-8 - 2\sqrt{7}}{-2} = 4 + \sqrt{7} \approx 6,65 \notin [0,6]$$

d) Se debe emitir una alerta siempre que la concentración supere las 20 ppm. Determina todos los intervalos de tiempo en los que la alerta debe estar activada.

Se hace un estudio de signos de $-t^2 + 8t - 9 > 0$, teniendo en cuenta que $t \in [0,6]$.

t	0	NO	$4 - \sqrt{7}$	SI	6
$-t^2 + 8t - 9$		-		+	

$$t = 1; \quad -1^2 + 8 \cdot 1 - 9 = -2 < 0$$

$$t = 4; \quad -4^2 + 8 \cdot 4 - 9 = 7 > 0$$

Después de estudiar el primer tramo, se concluye que la alerta debe estar activada en el intervalo de tiempo: $(4 - \sqrt{7}, 6]$

También debemos comprobar cuando supera las 20 ppm en el segundo tramo.

$$-8t + 69 > 0 \rightarrow -8t > -69 \rightarrow 8t < 69 \rightarrow t < \frac{69}{8}; t < 8,625$$

Después de estudiar el segundo tramo, se concluye que la alerta debe estar activada en el intervalo de tiempo: $(6; 8,625)$

La alarma debe estar activada cuando: $t \in (4 - \sqrt{7}; 8,625)$

BONUS—REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Concentración del tóxico y periodo de activación de la alerta

