PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2026–solapamiento

Álgebra matricial



www.angelcuesta.com

©Ángel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determina BB^t, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. *(0,5 puntos)*

b) Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(0,5 puntos)*

c) Halla $(B\,B^t)^5$. *(0,5 puntos)*

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

www.ang

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

a) Determina BB^t, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Se multiplican las matrices.

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot I$$

$$\boldsymbol{B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

b) Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(0,5 puntos)*

Se definen las matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$ $D^t = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

Se multiplican las matrices.

$$D \cdot D^t = \lambda B \cdot (\lambda B)^t \xrightarrow{(\lambda B)^t = \lambda \cdot B^t} D \cdot D^t = \lambda \cdot B \cdot \lambda \cdot B^t = \lambda^2 \cdot B \cdot B^t = \lambda^2 \cdot 9 \cdot I = 9\lambda^2 \cdot I$$

Aplico la igualdad del enunciado. $D \cdot D^t = 9\lambda^2 \cdot I = I \longrightarrow 9\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{9} \longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$

$$\boldsymbol{\lambda = \pm\frac{1}{3}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

c) Halla $(B\,B^t)^5$.

Se recuerda que: $B \cdot B^t = 9 \cdot I$

$$(B \cdot B^t)^5 = (9 \cdot I)^5 = 9^5 \cdot I^5 = 9^5 \cdot I = 9^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9^5 & 0 \\ 0 & 9^5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{B \cdot B^t})^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} \mathbf{9^5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9^5} \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Se despeja X de la ecuación matricial utilizando las propiedades de las matrices.

$$5XA - BCB^t = I \longrightarrow 5XA = I + BCB^t \longrightarrow 5XA \cdot A^{-1} = (I + BCB^t) \cdot A^{-1} \longrightarrow 5XI = (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$$

$$5X = (I + BCB^t) \cdot A^{-1} \longrightarrow X = \frac{1}{5} \cdot (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$$

Calculo las matrices que me faltan.

$$BCB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$$I + BCB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de A en la siguiente diapositiva.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Calculo X: $X = \frac{1}{5} \cdot (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20/3 & -32 \\ 4/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

www.angelcuesta.com

PROBLEMA 1B

JULIO 2026–solapamiento

Problema de sistemas de ecuaciones



©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1B

Una empresa de suministros tecnológicos vende tres tipos de componentes: procesadores, tarjetas gráficas y módulos de memoria. El departamento de contabilidad ha perdido la información sobre el precio individual de cada componente. No obstante, sabe que la venta de 2 procesadores, 1 tarjeta gráfica y 4 módulos de memoria sumó un total de 1020 € y que un lote de 3 procesadores y 2 tarjetas gráficas al que se aplicó un descuento equivalente al precio de 1 módulo de memoria se vendió al precio de 1280 €. Si el precio de una tarjeta gráfica es igual a la suma del precio de un procesador más el doble del precio de un módulo de memoria, determina el precio de cada componente.

En primer lugar, se definen las incógnitas del problema.

x = Precio de un procesador
y = Precio de una tarjeta gráfica
z = Precio de un módulo de memoria

Se traduce del español al lenguaje algebraico:

"la venta de 2 procesadores, 1 tarjeta gráfica y 4 módulos de memoria sumó un total de 1020€" $\longrightarrow$ $2x + y + 4z = 1020$

"y que un lote de 3 procesadores y 2 tarjetas gráficas al que se aplicó un descuento equivalente al precio de 1 módulo de memoria se vendió al precio de 1280€" $\longrightarrow$ $3x + 2y - z = 1280$

"el precio de una tarjeta gráfica es igual a la suma del precio de un procesador más el doble del precio de un módulo de memoria." $\longrightarrow$ $y = x + 2z$ $\longrightarrow$ $-x + y - 2z = 0$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1B

Quedando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + y + 4z = 1020 \\ 3x + 2y - z = 1280 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1020 & 1 & 4 \\ 1280 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4620}{21} = 220$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1020 & 4 \\ 3 & 1280 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{7140}{21} = 340$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1020 \\ 3 & 2 & 1280 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{1260}{21} = 60$$

Solución: un procesador cuesta **220 €**, una tarjeta gráfica **340 €** y un módulo de memoria **60 €**.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 2A

JULIO 2026–solapamiento

Análisis de funciones



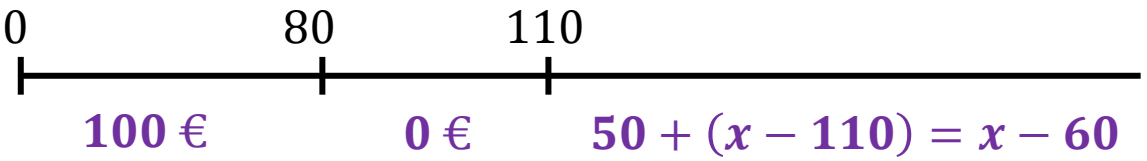
www.angelcuesta.com

©Ángel Cuesta Arza

Problema 2. A. En una carretera se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 110 km/h o inferior a 80 km/h. Si el radar detecta un vehículo con velocidad inferior a 80 km/h, el conductor debe pagar 100 euros, sea cual sea su velocidad; si la velocidad detectada es superior a 110 km/h, el conductor debe pagar 50 euros más la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 110 km/h, en euros; si la velocidad detectada está entre 80 y 110 km/h, ambos incluidos, no debe pagar nada.

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

Se observa que hay tres tramos en función de la velocidad



Expresamos la función a trozos con una sola expresión.

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

www.angel

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

Como cada tramo es continuo, solo es necesario estudiar los puntos de unión $x = 80$ y $x = 110$. Comenzamos estudiando la continuidad en $x = 80$.

$f(80) = 0$

$\lim_{x \to 80^-} f(x) = \lim_{x \to 80^-} 100 = 100$

$\lim_{x \to 80^+} f(x) = \lim_{x \to 80^+} 0 = 0$

$\longrightarrow \lim_{x \to 80^-} f(x) \neq \lim_{x \to 80^+} f(x)$

$f(x)$ no es continua en $x = 80$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

a) Obtén la función que indique los euros que debe pagar un conductor si el radar detecta que su coche circula a x km/h, para cualquier $x \geq 0$, y analiza en qué puntos esta función es continua y en qué puntos es discontinua. *(1,25 puntos)*

$$f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$$

Se estudia la continuidad de la función en $x = 110$.

$f(110) = 0$

$$\lim_{x \to 110^-} f(x) = \lim_{x \to 110^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 110^+} f(x) = \lim_{x \to 110^+} x - 60 = 50$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 110^-} f(x) \neq \lim_{x \to 110^+} f(x)$$

$f(x)$ no es continua en $x = 110$, presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2A

b) Calcula el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x = 120$ y la recta de ecuación $x = 125$. *(1 punto)*

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{100}; & \mathbf{0 \le x < 80} \\ \mathbf{0}; & \mathbf{80 \le x \le 110} \\ \mathbf{x - 60}; & \mathbf{x > 110} \end{cases}$$

En el intervalo [120,125] se aplica el tercer tramo, $f_3(x) = x - 60$, que es positivo. Por ello, el área se obtiene mediante la integral definida de $f_3(x)$ entre 120 y 125.

Se sustituye el tercer tramo, se calcula una primitiva y se aplica la regla de Barrow.

$$\int_{120}^{125} f(x)\ dx = \int_{120}^{125} (x - 60)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 60 \cdot x\right]_{120}^{125} = \left(\frac{125^2}{2} - 60 \cdot 125\right) - \left(\frac{120^2}{2} - 60 \cdot 120\right) = \frac{625}{2} = 312{,}5$$

El área delimitada por la función, el eje OX y las rectas $x = 120$ y $x = 125$ es $\mathbf{312{,}5\ unidades\ de\ área}$.

NOTA: En todo el intervalo [120,125] se utiliza **el tercer tramo de la función, porque $x > 110$**.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) En otra carretera solo se sanciona a los vehículos con velocidad superior a 120 km/h. Si la velocidad detectada por el radar no es superior a 120 km/h, el conductor no debe pagar nada; en caso contrario, debe pagar el triple de la diferencia entre la velocidad detectada por el radar y 120 km/h, en euros. ¿A qué velocidades un conductor tendrá que pagar lo mismo en esta carretera que en la anterior?

(1,25 puntos)

En la carretera anterior habíamos visto que: $f(x) = \begin{cases} 100; & 0 \leq x < 80 \\ 0; & 80 \leq x \leq 110 \\ x - 60; & x > 110 \end{cases}$

En la nueva carretera hay solo dos tramos:



Expresamos la función a trozos con una sola expresión. $g(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x \leq 120 \\ 3x - 360; & x > 120 \end{cases}$

Para velocidades entre 80 y 110 km/h ambas sanciones son 0 €. Para velocidades superiores a 120 km/h, igualamos las expresiones que calculan ambas sanciones.

$x - 60 = 3x - 360 \longrightarrow 2x = 300 \longrightarrow x = 150$

El conductor pagará lo mismo en ambas carreteras si circula entre **80 y 110 km/h**, ambos incluidos, ya que en las dos carreteras la multa es cero; además, también pagará lo mismo si circula exactamente a 150 km/h, pagando en ese caso 90 €.

www.angelcuesta.com
©Angel Cuesta Arza

PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 2B

JULIO 2026–solapamiento

Análisis de funciones



www.angelcuesta.com

©Ángel Cuesta Arza

Problema 2B

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos. *(2 puntos)*

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

www.angel

©Angel Cuesta Arza

Problema 2B

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + x^2}$

Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero. $1 + x^2 = 0 \longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

Por ello, el Dominio es: $\boldsymbol{Dom\, f(x) = R}$

Para calcular los puntos de corte con los ejes:

$$Eje\ Y(x = 0) \rightarrow f(0) = \frac{0^2 - 0}{1 + 0^2} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow \boldsymbol{A = (0, 0)}$$

$$Eje\ X\ (y = 0) \rightarrow \frac{x^2 - x}{1 + x^2} = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \longrightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \boldsymbol{A = (0, 0)} \\ x = 1 & \boldsymbol{B = (1, 0)} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: $\boldsymbol{A = (0, 0); B = (1, 0)}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 2B

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Dado que la función está definida en el conjunto de los números reales, no existe asíntota vertical para $f(x)$.

La **asíntota horizontal** se calcula estudiando el límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\boldsymbol{y = 1 \text{ es asíntota horizontal de } f(x)}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{1+x^2}$$

Se calcula la derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(1+x^2)-(x^2-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x+2x^3-1-x^2-2x^3+2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2}$$

Igualo la derivada a cero: $\frac{x^2+2x-1}{(1+x^2)^2}=0 \longrightarrow x^2+2x-1=0 \longrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}414 \\ x=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}414 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada.

	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(x)$ ***decrece*** en $\left(-1-\sqrt{2}\,,-1+\sqrt{2}\right)$

$f(x)$ ***crece*** en $\left(-\infty\,,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen, y el valor de estos.

$$f(x)=\frac{x^2-x}{1+x^2}$$

A partir del estudio de signos de la derivada y del estudio de la monotonía de la función, podemos deducir los valores de x en los que la función presenta máximos o mínimos relativos.

	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Se observa en el cuadro que la función tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{x=-1-\sqrt{2}}$ y un mínimo relativo en $\boldsymbol{x=-1+\sqrt{2}}$. Se obtienen las imágenes correspondientes.

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2-\left(-1-\sqrt{2}\right)}{1+\left(-1-\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\approx 1{,}207$$

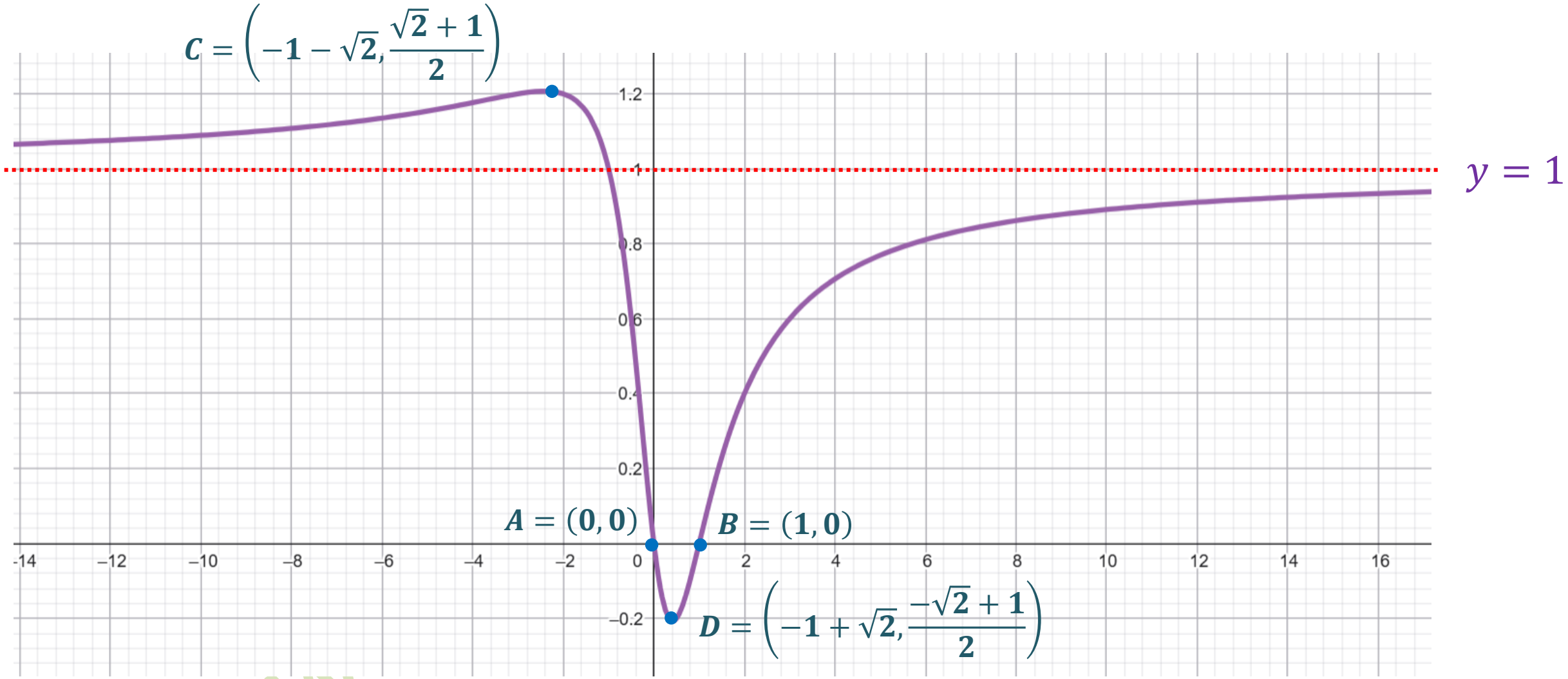
Máximo relativo: $\boldsymbol{C=\left(-1-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)}$

$$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\frac{\left(-1+\sqrt{2}\right)^2-\left(-1+\sqrt{2}\right)}{1+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}+1}{2}\approx -0{,}207$$

Mínimo relativo: $\boldsymbol{D=\left(-1+\sqrt{2},\frac{-\sqrt{2}+1}{2}\right)}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza



©Angel Cuesta Arza

PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 3

JULIO 2026–solapamiento

Probabilidad–Binomial



www.angelcuesta.com

©Ángel Cuesta Arza

VÍDEOS ÚTILES PARA REPASAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.

ÁNGEL CUESTA
Tu profesor en la red
SUSCRÍBETE

Curso de repaso de probabilidad básica

Álgebra de conjuntos. Fórmulas de la probabilidad.

Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes

Distribución binomial

Distribución normal (I)

Distribución normal (II)

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Problema 3

Problema 3. En la fase final del campeonato de Europa de baloncesto juegan Alemania, Francia, Croacia y España. Las semifinales son: España-Alemania y Francia-Croacia. La probabilidad de que España gane a Alemania es 0,7, la de que gane a Francia es 0,25 y la de que gane a Croacia es 0,55. La probabilidad de que Francia pierda contra Croacia es 0,4. Se supone independencia entre los resultados de unos partidos y otros.

a) Calcula probabilidad de que la final sea Alemania-Croacia. *(0,5 puntos)*
b) Calcula la probabilidad de que España sea campeona. *(1 punto)*
c) Si España ha sido campeona, ¿cuál es la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia? *(0,5 puntos)*
d) El mes siguiente al campeonato, España y Croacia jugarán siete partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que Croacia gane al menos cinco de esos partidos? *(1 punto)*

©Angel Cuesta Arza

Problema 3. En la fase final del campeonato de Europa de baloncesto juegan Alemania, Francia, Croacia y España. Las semifinales son: España-Alemania y Francia-Croacia. La probabilidad de que España gane a Alemania es 0,7, la de que gane a Francia es 0,25 y la de que gane a Croacia es 0,55. La probabilidad de que Francia pierda contra Croacia es 0,4. Se supone independencia entre los resultados de unos partidos y otros.

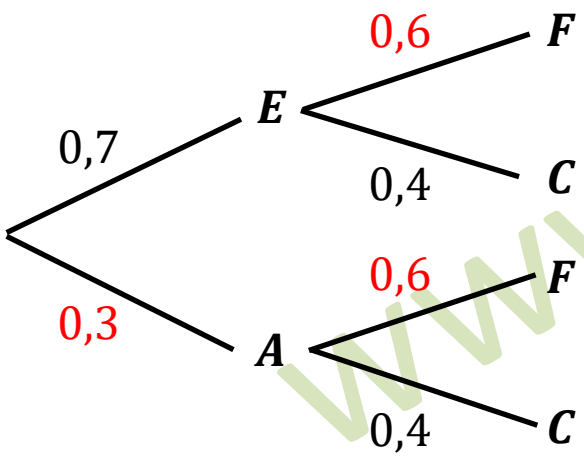
a) Calcula probabilidad de que la final sea Alemania-Croacia.

Primero asignamos una letra a cada suceso.

$\boldsymbol{E}$ = gana España $\quad$ $\boldsymbol{A}$ = gana Alemania

$\boldsymbol{F}$ = gana Francia $\quad$ $\boldsymbol{C}$ = gana Croacia

Se construye el diagrama de árbol.



Aplicamos el principio de multiplicación:

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

La probabilidad de que la final sea Alemania-Croacia es **0,12 (12 %).**

www.angelcuesta.c

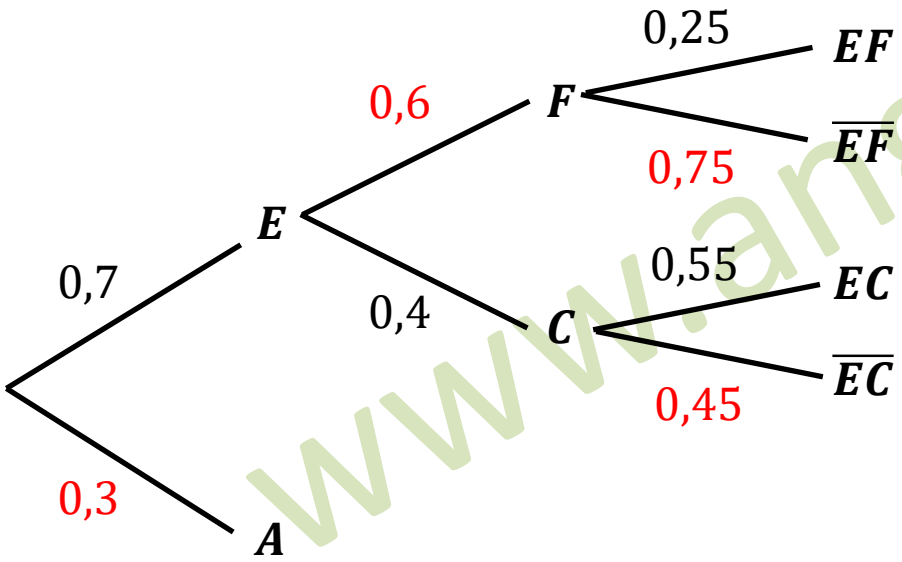
©Angel Cuesta Arza

Problema 3. En la fase final del campeonato de Europa de baloncesto juegan Alemania, Francia, Croacia y España. Las semifinales son: España-Alemania y Francia-Croacia. La probabilidad de que España gane a Alemania es 0,7, la de que gane a Francia es 0,25 y la de que gane a Croacia es 0,55. La probabilidad de que Francia pierda contra Croacia es 0,4. Se supone independencia entre los resultados de unos partidos y otros.

b) Calcula la probabilidad de que España sea campeona. Se construye el diagrama de árbol.

Hay sucesos adicionales, les asociamos una letra nueva $\boldsymbol{EF}$ = España gana a Francia $\boldsymbol{EC}$ = España gana a Croacia

$\boldsymbol{GE}$ = España gana el campeonato



Se calcula la probabilidad pedida:

$$P(GE) = P(EF) + P(EC)$$

$$P(EF) = P(E) \cdot P(F/E) \cdot P(EF/E \cap F) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}105$$

$$P(EC) = P(E) \cdot P(C/E) \cdot P(EC/E \cap C) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}55 = 0{,}154$$

$$P(GE) = P(EF) + P(EC) = 0{,}105 + 0{,}154 = 0{,}259$$

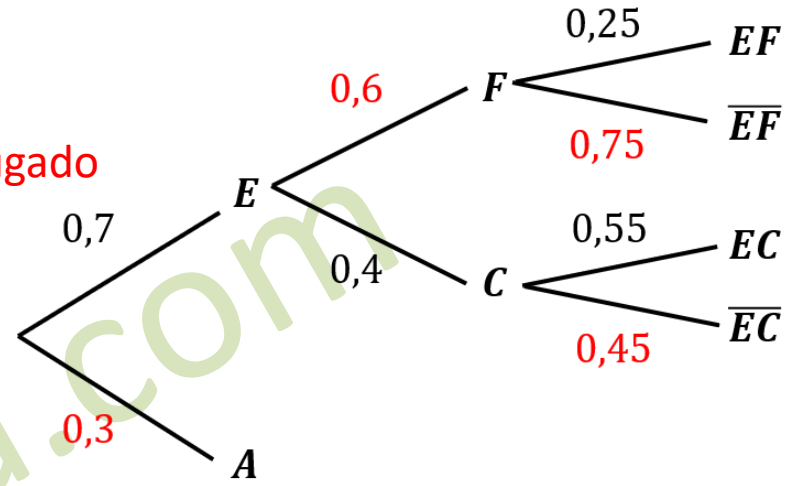
La probabilidad de que España sea campeona es **0,259 (25,9 %).**

www.angelcuesta.c

©Angel Cuesta Arza

Problema 3

c) Si España ha sido campeona, ¿cuál es la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia?



Aplicamos la definición de probabilidad condicionada:

$$P(E \cap F/GE) = \frac{P(E \cap F \cap EF)}{P(GE)} = \frac{P(EF)}{P(GE)} = \frac{0{,}105}{0{,}259} \approx 0{,}4054$$

Si España ha sido campeona, la probabilidad de que en la final haya jugado contra Francia es **0,4054 (40,54 %)**.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

d) El mes siguiente al campeonato, España y Croacia jugarán siete partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que Croacia gane al menos cinco de esos partidos?

Sea X el número de partidos que gana Croacia.

X es una variable aleatoria binomial donde: $n = 7; p = 0{,}45; q = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{X \sim Bi(7; 0{,}45)}$

Siendo p la probabilidad de que Croacia le gane el partido a España.

La probabilidad pedida es: $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Se obtienen las probabilidades directamente de la tabla.

$P(X = 5) = 0{,}1172$

$P(X = 6) = 0{,}0320$

$P(X = 7) = 0{,}0037$

		p												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	0,0083	0,0138	0,0156
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0090	0,0078
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	0,0872	0,0604	0,0547
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	0,2140	0,1740	0,1641
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	0,2918	0,2786	0,2734
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	0,2388	0,2676	0,2734
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	0,1172	0,1543	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	0,0320	0,0494	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	0,0037	0,0068	0,0078

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}1172 + 0{,}0320 + 0{,}0037 = 0{,}1529$

La probabilidad de que Croacia gane al menos cinco de esos partidos es **0,1529 (15,29 %)**.

©Angel Cuesta Arza