PAU · COMUNIDAD VALENCIANA

MATEMÁTICAS CC.SS

PROBLEMA 1A

JULIO 2026–solapamiento

Álgebra matricial



www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

Problema 1. A. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determina BB^t, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. *(0,5 puntos)*

b) Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(0,5 puntos)*

c) Halla $(B\,B^t)^5$. *(0,5 puntos)*

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

www.ar

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

a) Determina BB^t, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Se multiplican las matrices.

$$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \cdot I$$

$$\boldsymbol{B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

b) Consideramos la matriz $D = \lambda B$, siendo λ un número real. Determina λ para que $DD^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(0,5 puntos)*

Se definen las matrices: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \lambda B = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$ $D^t = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

Se multiplican las matrices.

$$D \cdot D^t = \lambda B \cdot (\lambda B)^t \xrightarrow{(\lambda B)^t = \lambda \cdot B^t} D \cdot D^t = \lambda \cdot B \cdot \lambda \cdot B^t = \lambda^2 \cdot B \cdot B^t = \lambda^2 \cdot 9 \cdot I = 9\lambda^2 \cdot I$$

Aplico la igualdad del enunciado. $D \cdot D^t = 9\lambda^2 \cdot I = I \longrightarrow 9\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda^2 = \frac{1}{9} \longrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{3}$

$$\boldsymbol{\lambda = \pm\frac{1}{3}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

c) Halla $(B\,B^t)^5$.

Se recuerda que: $B \cdot B^t = 9 \cdot I$

$$(B \cdot B^t)^5 = (9 \cdot I)^5 = 9^5 \cdot I^5 = 9^5 \cdot I = 9^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9^5 & 0 \\ 0 & 9^5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{B \cdot B^t})^{\mathbf{5}} = \begin{pmatrix} \mathbf{9^5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9^5} \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Se despeja X de la ecuación matricial utilizando las propiedades de las matrices.

$$5XA - BCB^t = I \longrightarrow 5XA = I + BCB^t \longrightarrow 5XA \cdot A^{-1} = (I + BCB^t) \cdot A^{-1} \longrightarrow 5XI = (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$$

$$5X = (I + BCB^t) \cdot A^{-1} \longrightarrow X = \frac{1}{5} \cdot (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$$

Calculo las matrices que me faltan.

$$BCB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$$I + BCB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17/3 & 4/3 \\ 4/3 & 11/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix}$$

Se calcula la matriz inversa de A en la siguiente diapositiva.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Calculo la **matriz inversa** por el método de los adjuntos.

1) Determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0 \rightarrow La\ matriz\ tiene\ inversa$

2) Matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

3) Matriz de los adjuntos traspuesta: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

PROBLEMA 1A

d) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $5XA - BCB^t = I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. *(2 puntos)*

Calculo X: $X = \frac{1}{5} \cdot (I + BCB^t) \cdot A^{-1}$

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20/3 & 4/3 \\ 4/3 & 14/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20/3 & -32 \\ 4/3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 4/3 & -32/5 \\ 4/15 & -2/5 \end{pmatrix}}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza